

Universität
Rostock



Traditio et Innovatio

Über funktionale ARCH- und GARCH-Zeitreihen

Dissertation

zur

Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Rostock

vorgelegt von

Sebastian Kühnert, geb. am 24.06.1988 in Zwickau

aus Rostock

Rostock, den 25.04.2019

Gutachter:

1. Prof. Dr. Alexander Meister

Institut für Mathematik, Universität Rostock

2. Prof. Dr. Alexander Aue

Department of Statistics, University of California, Davis

Tag der Einreichung: 25.04.2019

Tag der Verteidigung: 12.07.2019

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Notationen	1
2	Grundlagen	6
2.1	Metrische Räume, Banach- und Hilbert-Räume	6
2.2	Folgenräume, Funktionenräume und das punktweise Produkt	8
2.3	Operatortheorie	9
2.3.1	Beschränkte Operatoren	9
2.3.2	Kompakte Operatoren	11
2.3.3	Schatten-Klassen-Operatoren	12
2.3.4	Beschränkte Operatoren mit endlichdimensionalem Bild	15
2.4	Funktionale Zufallsvariablen	16
2.4.1	Konvergenzbegriffe und stochastische Landau-Symbole	16
2.4.2	Erwartungswerte in separablen Banach- und Hilbert-Räumen	17
2.5	Funktionale Zeitreihen	21
2.5.1	Stationarität	21
2.5.2	Lineare Prozesse und Invertierbarkeit	22
2.5.3	L^p - m -Approximierbarkeit	23
2.5.4	Ergodizität stationärer Zeitreihen	24
2.5.5	FAR-, FMA- und FARMA-Zetreihen	25
3	Das FARCH-Modell und das FGARCH-Modell	26
3.1	Definition und Darstellung	27
3.2	Stationäre Lösungen	28
3.3	Momente und Approximierbarkeit	30
4	Schätzung	33
4.1	Vorbereitung	34
4.1.1	Schätzung von Erwartungswerten und Autokovarianzoperatoren	34
4.1.2	Durch FGARCH- induzierte FARMA-Zeitreihen	38
4.1.3	Schätzung von Eigenwerten und Eigenfunktionen	41
4.1.4	Identifizierbarkeit	46
4.1.5	Tichonow-Regularisierung	47
4.1.6	Glattheit von Operatoren	47
4.2	Schätzung von δ	48
4.3	Operatorschätzung im FARCH-Modell	49
4.3.1	Operatorschätzung im FARCH(1)-Modell	50
4.3.2	Operatorschätzung im FARCH(\mathbf{p})-Modell mit $\mathbf{p} > 1$	54

4.4	Operatorschätzung im FGARCH-Modell	61
4.4.1	Vorbereitung	62
4.4.1.1	Das asymptotische Verhalten bestimmter Kovarianz- und Autokreuzkovarianzoperatoren bei wachsender Dimension	62
4.4.1.2	Operatorschätzung in invertierbarer Darstellung	64
4.4.1.3	Operatorschätzung im linearen Prozess	71
4.4.2	Operatorschätzung im FGARCH(1, 1)-Modell	73
4.4.3	Operatorschätzung im FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Modell mit $\max(\mathbf{p}, \mathbf{q}) > 1$. .	79
5	Simulation	85
5.1	Eine FARCH(1)-Zeitreihe	87
5.2	Eine FARCH(2)-Zeitreihe	89
5.3	Eine FGARCH(1, 1)-Zeitreihe	90
5.4	Eine FARCH(2, 1)-Zeitreihe	92
6	Zusammenfassung und Ausblick	94
	Literaturverzeichnis	98
	Abkürzungsverzeichnis	101
	Anhang	102
	Danksagungen	
	Eidesstattliche Versicherung	

1 Einleitung und Notationen

Motivation

Mit Hilfe von stochastischen Prozessen mit kontinuierlicher oder mit diskreter Indexmenge können zufällige Vorgänge in der Zeit, bspw. in der Finanzmathematik für die Darstellung von Aktienkursverläufen (siehe [18], Abschnitt 1.2 und 1.3) und in der Meteorologie für Wettervorhersagen, modelliert werden. Dabei werden reellwertige stochastische Prozesse mit diskreter Indexmenge als Zeitreihen bezeichnet (siehe [2] und [9]). Für Zeitreihen gibt es diverse Modelle, in denen sich deren Elemente durch eine Rekursion beschreiben lassen, was zum Beispiel auf AR-, MA- und ARMA-Zeitreihen zutrifft (siehe [9]). Ein weiteres Modell für Zeitreihen, bei denen die Elemente in gewisser Weise rekursiv definiert sind, ist das so genannte ARCH-Modell (*autoregressive conditional heteroskedasticity*), welches für die Analyse reellwertiger, ökonomischer Zeitreihen mit zeitlich variabler Volatilität von Engle im Jahr 1982 in [16] aufgestellt wurde. Für dieses Modell wurde ihm im Jahr 2003 der Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften verliehen. Eine häufig verwendete Definition von ARCH-Zeitreihen ist bspw. die folgende (für weitere Definitionen, siehe [20]): Eine Zeitreihe $(\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ heißt ARCH(\mathbf{p})-Zeitreihe mit $\mathbf{p} \in \mathbb{N}$, wenn

$$\mathcal{X}_k = \varepsilon_k \sigma_k, \quad \sigma_k^2 = \delta + \sum_{i=1}^{\mathbf{p}} \alpha_i \mathcal{X}_{k-i}^2$$

fast sicher (f.s.) für alle k gilt, wobei $\delta > 0$ sowie $\alpha_1, \dots, \alpha_{\mathbf{p}} \geq 0$ mit $\alpha_{\mathbf{p}} > 0$ gilt und $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine unabhängig und identisch verteilte (u.i.v.) Zeitreihe mit $\mathbb{E}(\varepsilon_0) = 0$ sowie $\mathbb{E}(\varepsilon_0^2) = 1$ ist. Da für die bedingten Varianzen solch einer Zeitreihe $\text{Var}[\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_l, l < k] = \sigma_k^2$ für alle k gilt und σ_k^2 von $\mathcal{X}_{k-1}, \dots, \mathcal{X}_{k-\mathbf{p}}$ abhängt, die bedingten Varianzen also autoregressiv und heterogen sind (Varianzheterogenität wird auch Heteroskedastizität genannt), ist der Begriff ARCH plausibel. Dieses Modell wurde von Bollerslev im Jahr 1986 in [6] zum GARCH-Modell (*generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*) erweitert. Für dieses Modell verwenden wir die folgende Definition (für weitere Definitionen, siehe [18]): Eine Zeitreihe $(\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ heißt GARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihe mit $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}$, wenn

$$\mathcal{X}_k = \varepsilon_k \sigma_k, \quad \sigma_k^2 = \delta + \sum_{i=1}^{\mathbf{p}} \alpha_i \mathcal{X}_{k-i}^2 + \sum_{j=1}^{\mathbf{q}} \beta_j \sigma_{k-j}^2$$

f.s. für alle k gilt, wobei $\delta > 0$ sowie $\alpha_1, \dots, \alpha_{\mathbf{p}}, \beta_1, \dots, \beta_{\mathbf{q}} \geq 0$ mit $\alpha_{\mathbf{p}}, \beta_{\mathbf{q}} > 0$ gilt. Sowohl zu ARCH- als auch zu GARCH-Zeitreihen gibt es zahlreiche Publikationen, wobei eine Vielzahl von Eigenschaften reellwertiger (univariater und multivariater) ARCH- und GARCH-Zeitreihen [2], [20] und [18] entnommen werden kann.

Es besteht auch die Möglichkeit Zusammenhänge zwischen Zufallsvariablen zu untersuchen, die Werte in einem separablen Banach-Raum annehmen. Diese Zufallsvariablen

nennen wir *funktionale Zufallsvariablen*, da als separable Banach-Räume meist Funktionenräume betrachtet werden. Die Theorie der Analyse von funktionalen Zufallsvariablen wird *Funktionale Datenanalyse* genannt (siehe Abschnitt 2.4, [7], [8], [18], [21], [24], [31] und [36]). Zeitreihen, die aus funktionalen Zufallsvariablen bestehen, bezeichnen wir *funktionale Zeitreihen* (siehe Abschnitt 2.5, [7], [8] und [21]). Eine funktionale Zeitreihe erhalten wir auf natürliche Weise, indem wir statt des stochastischen Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ mit fast sicher stetigen Pfaden, die Zeitreihe $(Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ aus den stochastischen Prozessen $Y_k = (Y_k(t))_{t \in [0,1]}$ bzw. $C[0,1]$ -wertigen Zufallsvariablen mit $Y_k(t) := X_{k+t}$ für alle k, t betrachten (für diverse Funktionenräume, siehe Abschnitt 2.2). In der Literatur zu funktionalen Zeitreihen wird sich häufig auf die Räume $C[0,1]$ und $L^2[0,1]$ beschränkt (siehe [3], [10], [11], [12], [22], [23], [28] und [35]). Für die Verwendung anderer Funktionenräume bei funktionalen Zeitreihen, siehe [14] und [32].

Im Jahr 2013 stellten Hörmann, Horváth und Reeder in [22] eine funktionale Version des ARCH(1)-Modells für Zeitreihen mit Werten in $C[0,1]$ und $\mathcal{H} := L^2[0,1]$ auf. In diesem ARCH(1)-Modell ist die Gleichung $\mathcal{X}_k = \varepsilon_k \sigma_k$ als punktweises Produkt der beiden funktionalen Zufallsvariablen ε_k mit σ_k zu verstehen und es liegt die Gleichung $\sigma_k^2 = \delta + \alpha_1(\mathcal{X}_k^2)$ vor, wobei α_1 ein geeigneter Operator ist. In den Theoremen 2.1 und 2.3 in [22] wurden hinreichende Bedingungen für Stationarität von \mathcal{H} - bzw. $C[0,1]$ -wertigen ARCH(1)-Zeitreihen angegeben. Des Weiteren wurde für \mathcal{H} -wertige Zeiteihen in [22], Lemma 3.1 bzw. [22], Theorem 3.1 eine asymptotische obere Schranke für die Schätzfehler bestimmter Schätzer für δ bzw. für eine Projektion des Integraloperators α_1 auf einen endlichdimensionalen Unterraum im Sinne stochastischer Konvergenz formuliert. Im Jahr 2017 definierten Aue, Horváth und Pellatt in [3] funktionale GARCH(1,1)-Zeitreihen mit Werten in \mathcal{H} sowie $C[0,1]$ und formulierten in den Theoremen 1 bzw. 2 hinreichende Bedingungen für Stationarität dieser Zeitreihen. Es wurde ein Kleinst-Quadrat-Schätzer für die Parameter in \mathcal{H} -wertigen GARCH(1,1)-Zeitreihen hergeleitet und ein Konsistenzresultat im Sinne fast sicher Konvergenz in Theorem 3 angegeben. Schließlich, im Jahr 2019, definierten Cerovecki, Francq, Hörmann und Zakoïan in [11] \mathcal{H} -wertige GARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihen mit beliebigen Ordnungen $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}$. In [11], Theorem 1 wurde eine hinreichende Bedingung für Stationarität von \mathcal{H} -wertigen GARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihen mit $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}$ angegeben. Ferner wurde ein Quasi-Maximum-Likelihood-Schätzer für die auf einen geeigneten Unterraum projizierten Parameter dieser GARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihen mit $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}$ angegeben und in [11], Theorem 2 wurde ein Konsistenzresultat im Sinne fast sicherer Konvergenz ohne Angabe einer Rate formuliert. Außerdem wird in [11], Proposition 3 ein Konsistenzresultat für einen Schätzer für die Parameter von \mathcal{H} -wertigen GARCH(1,1)-Zeitreihen angegeben, wobei diese Parameter nicht auf einen Unterraum projiziert werden.

Die vorliegende Dissertation widmet sich der Analyse von probabilistischen Eigenschaften und der Schätzung der Parameter von funktionalen ARCH-(FARCH-) sowie funktionalen GARCH-(FGARCH-)Zeitreihen mit beliebigen Ordnungen. Beruhend auf den Arbeiten [3], [11] und [22] werden hinreichende Bedingungen für die Existenz von stationären FARCH(\mathbf{p})- und FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihen mit $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}$ und Werten in diversen Funktionenräumen formuliert. Für diese Zeitreihen werden außerdem hinreichende Bedingungen für die Existenz diverser Momente sowie für L^p - m -Approximierbarkeit (siehe Abschnitt 2.5.3) angegeben. Unser Augenmerk richten wir auf die Herleitung der Schätzer für die Parameter von \mathcal{H} -wertigen FARCH(\mathbf{p})- und FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihen und von asymptotischen oberen Schranke für die Schätzfehler der Schätzer für die Parameter, ohne diese auf einen endlichdimensionalen Unterraum zu projizieren. Für FARCH-Zeitreihen

werden wir zudem asymptotische obere Schranken der Schätzfehler für die Schätzer der Parameter, die wir auf einen endlichdimensionalen Unterraum projizieren, formulieren.

Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 werden die Grundlagen zur Analyse von funktionalen Zeitreihen dargelegt. Wir werden an die Definitionen und Eigenschaften von metrischen, Banach- sowie Hilbert-Räumen im Allgemeinen und an konkrete Funktionenräume, die in die Aufstellung des FARCH- und des FGARCH-Modell in dieser Dissertation eingehen, erinnern. Ferner werden wir die Definitionen und Eigenschaften diverser Operatoren angeben, die bspw. in den FARCH- und FGARCH-Gleichungen enthalten sind. Außerdem werden Eigenschaften von funktionalen Zufallsvariablen behandelt, es wird ein Erwartungswert für diese Zufallsvariablen definiert und sich schließlich funktionalen Zeitreihen gewidmet. In Kapitel 3 erfolgt eine formale Definition von FARCH- und FGARCH-Zeitreihen mit Werten in diversen Funktionenräumen. Für diese FARCH- und FGARCH-Zeitreihen werden wir hinreichende Bedingungen für Stationarität, für die Existenz diverser Momente und für L^p - m -Approximierbarkeit (siehe Abschnitt 2.5.3) angeben. In Kapitel 4, das die zentralen Resultate dieser Arbeit beinhaltet, werden Schätzer für die Parameter im FARCH- und im FGARCH-Modell hergeleitet und für deren Schätzfehler asymptotische obere Schranken im Sinne von stochastischer Konvergenz angegeben. Dabei werden wir im FARCH-Modell die Operatoren sowohl projiziert auf einen endlichdimensionalen Unterraum als auch ohne sie auf einen endlichdimensionalen Unterraum zu projizieren schätzen; im FGARCH-Modell werden wir die Operatoren schätzen, ohne sie auf einen endlichdimensionalen Unterraum zu projizieren. In Kapitel 5 werden wir Realisationen von bestimmten \mathcal{H} -wertigen Innovationen sowie von Differenzen bestimmter \mathcal{H} -wertiger FARCH(1)-, FARCH(2)-, FGARCH(1, 1)- und FGARCH(2, 1)-Zeitreihen zu diesen Innovationen skaliert mit einem Faktor (dies geht aus der Definition von δ in Kapitel 5 hervor) simulieren. In Kapitel 6 wird die Dissertation zusammengefasst, wesentliche Resultate werden herausgearbeitet und es wird ein Ausblick auf weitere Fragestellungen gegeben.

Notationen

In der gesamten Arbeit verwenden wir die folgenden Notationen und Konventionen.

- Für zwei per Definition äquivalente Aussagen A und B schreiben wir $A \Leftrightarrow B$.
- Für jede nichtleere Menge $A \subseteq \mathbb{R}$, jede Zahl $b \in \mathbb{R}$ und jeden relationalen Operator $R \in \{<, \leq, \neq, \geq, >\}$ gilt

$$A_{Rb} := \{a \in A \mid a R b\}.$$

- Die Menge $\mathbb{N} \cup \{0\}$ symbolisieren wir mit \mathbb{N}^* (statt wie üblich mit \mathbb{N}_0), um sie mit einem relationalen Operator $R \in \{<, \leq, \neq, \geq, >\}$ versehen zu können.
- Es sei V ein Vektorraum und es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann steht V^n für das kartesische Produkt $V^n = V \times \cdots \times V$ aus n Faktoren und V^∞ steht für das kartesische Produkt

$V \times V \times \dots$. Diese kartesischen Produkte sind Vektorräume, wenn Addition und Skalarmultiplikation komponentenweise durchgeführt werden.

- 0_V steht für das neutrale Element bzgl. der Addition eines Vektorraums V .
- Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge und $f, g, h: A \rightarrow \mathbb{R}$ seien Funktionen. Dann schreiben wir $f \propto g$, wenn f und g proportional sind, d.h. es existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = cg(x)$ für alle $x \in A$. Des Weiteren schreiben wir $f \lesssim g$ bzw. $f \gtrsim g$, sofern $h \propto g$ sowie $f(x) \leq h(x)$ bzw. $f(x) \geq h(x)$ für alle $x \in A$ gilt.
- $\mathbb{1}$ steht für die Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(t) = 1$ für alle $t \in [0, 1]$.
- \mathbb{I}_A sei die identische Abbildung auf einer nichtleeren Menge A , d.h. $\mathbb{I}_A(a) = a$ für alle $a \in A$.
- Für den Kern einer linearen Abbildung A zwischen zwei Vektorräumen schreiben wir $\text{Kern}(A)$ und für das Bild von A schreiben wir $\text{Bild}(A)$.
- Für jede Menge A gilt

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

- δ_{ij} mit $i, j \in \mathbb{R}$ steht für das *Kronecker-Delta*, d.h. $\delta_{ij} := \mathbf{1}_{\{i\}}(j)$.
- sgn steht für die *Signumfunktion*, d.h. $\text{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \mathbf{1}_{(0, \infty)}(t) - \mathbf{1}_{(-\infty, 0)}(t)$.
- Wir sagen, dass eine bestimmte Eigenschaft für fast alle (f.f.a.) Glieder einer Folge gilt, wenn sie auf höchstens endlich viele Glieder nicht zutrifft.
- $\overline{\lim}$ steht für den Limes superior und $\underline{\lim}$ steht für den Limes inferior.
- Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reellwertige Folgen. Dann bezeichnen wir die Folge $(a_n)_n$ als *asymptotisch ...*
 - äquivalent zu $(b_n)_n$, i.Z. $a_n \sim b_n$, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ gilt;
 - vergleichbar mit $(b_n)_n$, i.Z. $a_n \asymp b_n$, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ für ein $c \neq 0$ gilt;
 - von $(b_n)_n$ nach oben beschränkt, i.Z. $a_n = O(b_n)$, falls $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| < \infty$ gilt;
 - gegenüber $(b_n)_n$ vernachlässigbar, i.Z. $a_n = o(b_n)$, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ gilt;
 - von $(b_n)_n$ nach unten beschränkt, i.Z. $a_n = \Omega(b_n)$, falls $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| > 0$ gilt;
 - gegenüber $(b_n)_n$ dominant, i.Z. $a_n = \omega(b_n)$, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = \infty$ gilt.

Des Weiteren gilt:

- $a_n = \Xi[b_n, c_n]$, falls $a_n = \Omega(b_n)$ und $a_n = O(c_n)$ gilt.
- $a_n = \Xi(b_n, c_n]$, falls $a_n = \omega(b_n)$ und $a_n = O(c_n)$ gilt.
- $a_n = \Xi[b_n, c_n)$, falls $a_n = \Omega(b_n)$ und $a_n = o(c_n)$ gilt.
- $a_n \in \Xi(b_n, c_n)$, falls $a_n = \omega(b_n)$ und $a_n = o(c_n)$ gilt.

- Es sei (M, d_M) ein metrischer Raum. Dann stehe $\mathbb{B}(M)$ für die Borel'sche σ -Algebra über M und für jede Teilmenge A von M gelte $\mathbb{B}(A) := \{A \cap B \mid B \in \mathbb{B}(M)\}$.
- Für das Lebesgue-Borel-Maß auf $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir λ^n mit $\lambda = \lambda^1$. Ferner schreiben wir für das Lebesgue-Integral über einem Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ einer messbaren Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stets $\int_a^b f(t)dt$.
- Es sei (M, \mathfrak{M}, μ) ein Maßraum und $\mathcal{E}(m)$ eine Eigenschaft, die einem $m \in M$ zukommen kann. Dann sagen wir, dass \mathcal{E} μ -fast überall (μ -f.ü.) bzw. für μ -fast alle (μ -f.a.) $m \in M$ gilt, falls eine μ -Nullmenge $N \in \mathfrak{M}$ existiert, sodass $\mathcal{E}(m)$ für alle $m \in M \setminus N$ erfüllt ist. Des Weiteren sprechen wir statt von μ -f.ü. von μ -fast sicher (μ -f.s.), falls μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, wobei wir f.s. schreiben, wenn klar ist, um welches Wahrscheinlichkeitsmaß es sich handelt.
- Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, (Ω', \mathfrak{A}') ein Messraum und $X: \Omega \rightarrow \Omega'$ eine Zufallsvariable, d.h. eine \mathfrak{A} - \mathfrak{A}' -messbare Abbildung. Dann schreiben wir \mathbb{P}_X für die Verteilung von X unter \mathbb{P} auf \mathfrak{A}' .
- Zwei Zufallsvariablen X und Y bezeichnen wir als *identisch verteilt*, falls $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ gilt. In diesem Fall schreiben wir $X \stackrel{d}{=} Y$.
- Es sei $(X_k)_{k \in I}$ eine Folge von Zufallsvariablen, wobei I für eine nichtleere, abzählbare Menge steht. Dann heißt $(X_k)_{k \in I}$ *unabhängig und identisch verteilt* (u.i.v.), falls $(X_k)_{k \in I}$ stochastisch unabhängig mit $X_i \stackrel{d}{=} X_j$ für alle $i, j \in I$ ist.

2 Grundlagen

Für den Umgang mit *funktionalen Zeitreihen* werden insbesondere Kenntnisse über Banach- sowie Hilbert-Räume, bestimmte Funktionenräume, Operator- und Wahrscheinlichkeitstheorie in separablen Banach-Räumen benötigt. In den Abschnitten 2.1 bis 2.4 fassen wir die für diese Arbeit wichtigsten Resultate dieser Themengebiete zusammen und behandeln *funktionale Zeitreihen* und deren wichtigste Eigenschaften in Abschnitt 2.5.

Zunächst formulieren wir eine elementare Ungleichung, von der wir in der gesamten Arbeit in diversen Nachweisen stillschweigend Gebrauch machen werden.

Lemma 2.1. *Für beliebige Zahlen $a_1, \dots, a_n \geq 0$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $\nu > 0$ gilt:*

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^\nu \leq \left(\mathbf{1}_{(0,1]}(\nu) + \mathbf{1}_{(1,\infty)}(\nu) n^{\nu-1} \right) \sum_{k=1}^n a_k^\nu. \quad (2.1)$$

Beweis. Es gelte o.B.d.A. $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Dann gilt (2.1) für $\nu \in (0, 1]$, weil die Funktion $[0, \infty) \ni t \mapsto \varphi(t) := a_1^\nu + t^\nu - (a_1 + t)^\nu$ monoton wächst (die Idee ist von [15], VI., Satz 1.10) und für $\nu > 1$ folgt (2.1) aus der Jensen'schen Ungleichung. \square

2.1 Metrische Räume, Banach- und Hilbert-Räume

Hier erinnern wir an die Definition von *metrischen*, *Banach-* und *Hilbert-Räumen* sowie an Begriffe, die im Zusammenhang dieser Räume auftreten (siehe hierzu Werner [42]). Dabei ist anzumerken, dass wir unter dem Begriff Vektorraum stets einen Vektorraum über \mathbb{R} und unter dem Begriff Unterraum stets einen Untervektorraum verstehen.

(M, d_M) ist ein *metrischer Raum*, wenn M eine nichtleere Menge sowie d_M eine Metrik auf M ist. (M, d_M) wird als *vollständig* bezeichnet, wenn jede Cauchy-Folge $(m_n)_n \subseteq M$ (bzgl. d_M) in M konvergiert und (M, d_M) heißt *separabel*, wenn M eine abzählbare, *dichte* Teilmenge besitzt, d.h. dass eine abzählbare Menge $A \subseteq M$ mit $\overline{A} = M$ existiert. \overline{A} steht dabei für den *Abschluss von A in M* , das ist die kleinste Menge $A \subseteq M$, die *abgeschlossen in M* ist, wobei eine Menge $A \subseteq M$ als *abgeschlossen in M* bezeichnet wird, wenn der Grenzwert jeder in M konvergierenden Folge $(\tilde{m}_n)_n \subseteq A$ in A liegt.

Ein *Banach-Raum* $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ ist ein vollständiger, *normierter Raum*, d.h. \mathcal{B} ist ein mit einer Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ ausgestatteter Vektorraum, der bzgl. der von der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ induzierten Metrik vollständig ist. Solch ein Banach-Raum ist nach [42], Lemma I.2.9 genau dann separabel, wenn eine abzählbare Menge $B \subseteq \mathcal{B}$ mit $\overline{\text{lin}(B)} = \mathcal{B}$ existiert, wobei $\text{lin}(B)$ für die *lineare Hülle* von B steht. Ferner wird ein Banach-Raum $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ als *Banach-Algebra* bzgl. einer bilinearen, assoziativen Operation $\diamond: \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ bezeichnet, wenn

$\|a \diamond b\|_{\mathcal{B}} \leq \|a\|_{\mathcal{B}} \|b\|_{\mathcal{B}}$ für alle $a, b \in \mathcal{B}$ gilt. Falls $\tilde{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B}$ außerdem ein abgeschlossener Unterraum von \mathcal{B} ist, so ist $(\tilde{\mathcal{B}}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ wieder ein Banach-Raum.

Ein *Hilbert-Raum* $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ ist ein mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ ausgestatteter Vektorraum, der bzgl. der vom Skalarprodukt induzierten Metrik vollständig ist – jener Metrik, die induziert ist von der vom Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ induzierten Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ mit $\|h\|_{\mathcal{H}} := \langle h, h \rangle_{\mathcal{H}}^{1/2}$ für $h \in \mathcal{H}$. Unendlichdimensionale Hilbert-Räume sind nach [42], Korollar V.4.10 genau dann separabel, wenn sie eine abzählbare *Orthonormalbasis* (ONB) haben. Dabei ist eine ONB eines Hilbert-Raums $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ ein *Orthonormalsystem* (ONS) S mit $\mathcal{H} = \overline{\text{lin}(S)}$, wobei eine Menge $S \subseteq \mathcal{H}$ ein ONS ist, wenn $\|s\|_{\mathcal{H}} = 1$ für alle $s \in S$ sowie $s \perp t$, d.h. $\langle s, t \rangle_{\mathcal{H}} = 0$, für alle $s, t \in S$ mit $s \neq t$ gilt. Falls $\tilde{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{H}$ außerdem ein abgeschlossener Unterraum von \mathcal{H} ist, so ist auch $(\tilde{\mathcal{H}}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ ein Hilbert-Raum.

In der gesamten Arbeit werden wir von dem folgenden Satz Gebrauch machen.

Satz 2.2. *Es sei $S \subseteq \mathcal{H}$ ein ONS eines Hilbert-Raums $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$.*

(a) *Es existiert eine ONB \tilde{S} von \mathcal{H} mit $S \subseteq \tilde{S}$.*

(b) *Für alle $h \in \mathcal{H}$ gilt (Bessel'sche Ungleichung)*

$$\sum_{s \in S} \langle h, s \rangle_{\mathcal{H}}^2 \leq \|h\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (2.2)$$

(c) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

i) *S ist eine ONB von \mathcal{H} , d.h. $\mathcal{H} = \overline{\text{lin}(S)}$.*

ii) *$h = \sum_{s \in S} \langle h, s \rangle_{\mathcal{H}} s$ für alle $h \in \mathcal{H}$.*

iii) *Für alle $h \in \mathcal{H}$ gilt (Parseval'sche Gleichung)*

$$\|h\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{s \in S} \langle h, s \rangle_{\mathcal{H}}^2. \quad (2.3)$$

Beweis. Siehe [42], Satz V.4.3 und Satz V.4.9. □

In dieser Arbeit benötigen wir die kartesischen Produkte \mathcal{B}^n bzw. \mathcal{H}^n mit $n \in \mathbb{N}$ von Banach-Räumen $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ bzw. von separablen Hilbert-Räumen $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$. $(\mathcal{B}^n, \|\cdot\|_{\mathcal{B}^n})$ ist ein Banach-Raum mit der Norm $\|\mathbf{b}\|_{\mathcal{B}^n} := \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{\mathcal{B}}$ für $\mathbf{b} := (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathcal{B}^n$, wobei auf \mathcal{B}^n die folgenden, nach [42], Satz I.3.3 äquivalenten, Normen $\|\cdot\|_{\mathcal{B}^n, q}$ mit

$$\|\mathbf{b}\|_{\mathcal{B}^n, q} = \mathbf{1}_{[1, \infty)}(q) \left(\sum_{i=1}^n \|b_i\|_{\mathcal{B}}^q \right)^{1/q} + \mathbf{1}_{\{\infty\}}(q) \max_{1 \leq i \leq n} \|b_i\|_{\mathcal{B}} \quad (2.4)$$

definiert werden können. Ferner ist $(\mathcal{H}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}^n})$ ein separabler Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}^n} := \sum_{i=1}^n \langle x_i, y_i \rangle_{\mathcal{H}}$ für $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathcal{H}^n$. Sei $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ nun eine ONB von \mathcal{H} , so ist $(\mathbf{h}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine ONB von \mathcal{H}^n mit

$$\mathbf{h}_{k+(l-1)n} := (0_{\mathcal{H}}, \dots, 0_{\mathcal{H}}, h_l, 0_{\mathcal{H}}, \dots, 0_{\mathcal{H}})^T \quad (2.5)$$

für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ und $l \in \mathbb{N}$, wobei k die Komponente des Vektors sei, an der h_l positioniert ist, die wir als durch $(h_j)_j$ induzierte ONB von \mathcal{H}^n bezeichnen.

2.2 Folgenräume, Funktionenräume und das punktweise Produkt

Die Zeitreihen in den Kapiteln 3 und 4 nehmen ausschließlich Werte in bestimmten *Funktionenräumen* an. Unter einem *Funktionenraum* verstehen wir einen Vektorraum von Funktionen mit gleichem Definitionsbereich, Funktionenräume mit höchstens abzählbarem Definitionsbereich (meist \mathbb{N} oder \mathbb{N}^*) bezeichnen wir als *Folgenräume*. Hier geben wir zuerst bekannte Folgen- und Funktionenräume samt ihren Eigenschaften an und befassen uns anschließend mit dem punktweisen Produkt \odot in Funktionenräumen, das unter anderem für die Definition des *FGARCH*-Modells in Kapitel 3 gebraucht wird.

Definition und Eigenschaften 2.3. Die folgenden Mengen sind Vektorräume, wenn sie mit den Operationen $a + b := (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $\alpha a := (\alpha a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ versehen werden.

- (a) $\ell^\infty(\mathbb{N})$ steht für den *Raum beschränkter Folgen* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein inseparabler Banach-Raum, wobei die *Supremumsnorm* $\|\cdot\|_\infty$ durch $\|a\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ für alle $a = (a_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ definiert sei.
- (b) $c_0(\mathbb{N})$ steht für den *Raum der Nullfolgen* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Bei $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ handelt es sich um einen separablen Banach-Raum.
- (c) $\ell^p(\mathbb{N})$ steht für den *Raum p -fach absolutsummierbarer Folgen* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit $p \in [1, \infty)$. Dabei ist $(\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ ein separabler Banach-Raum für alle $p \in [1, \infty)$ mit $\|a\|_p := (\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p)^{1/p}$ für $a := (a_n)_n \in \ell^p(\mathbb{N})$. Ferner ist $(\ell^2(\mathbb{N}), \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ mit $\langle a, b \rangle_2 := \sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ für $a = (a_n)_n, b = (b_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$ ein separabler Hilbert-Raum.
- (d) $d(\mathbb{N})$ steht für den *Raum endlicher Folgen* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Dabei ist anzumerken, dass $(d(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ kein Banach-Raum ist.

Beweis. Siehe [42], S.3 f., 8 – 13, 29. □

Für obige Folgenräume gilt für alle $p, q \in [1, \infty)$ mit $p < q$

$$d(\mathbb{N}) \subsetneq \ell^p(\mathbb{N}) \subsetneq \ell^q(\mathbb{N}) \subsetneq c_0(\mathbb{N}) \subsetneq \ell^\infty(\mathbb{N}). \quad (2.6)$$

Dabei ist $(\ell^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ zu jedem unendlichdimensionalen separablen Hilbert-Raum *isometrisch isomorph* (siehe [42], Korollar V.4.13).

Definition und Eigenschaften 2.4. Die folgende Mengen von Funktionen mit Definitionsbereich $[0, 1]$ sind Vektorräume, wenn sie mit den Operationen $(f + g)(s) := f(s) + g(s)$ und $(\alpha f)(s) := \alpha f(s)$ versehen werden, wobei $s \in [0, 1], \alpha \in \mathbb{R}$ und $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt.

- (a) $\ell^\infty[0, 1]$ steht für den *Raum beschränkter Funktionen* $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein inseparabler Banach-Raum, wobei die Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ diesmal definiert sei durch $\|f\|_\infty := \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$ für alle $f \in \ell^\infty[0, 1]$.
- (b) $\mathcal{C}[0, 1]$ steht für den *Raum stetiger Funktionen* $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Dabei ist $(\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ ein separabler Banach-Raum.

- (c) Für $p \in [1, \infty)$ stehen $L^p[0, 1]$ für die Äquivalenzklassen messbarer, p -fach Lebesgue-Borel-integrierbarer Funktionen $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die wir als L^p -Räume bezeichnen. Dabei ist $(L^p[0, 1], \|\cdot\|_{L^p[0, 1]})$ ein separabler Banach-Raum für alle $p \in [1, \infty)$ mit $\|f\|_{L^p[0, 1]}^p := \int_0^1 |f(s)|^p ds$ für $f \in L^p[0, 1]$; und für alle $p, q \in [1, \infty)$ mit $p < q$ gilt

$$L^q[0, 1] \subsetneq L^p[0, 1]. \quad (2.7)$$

Des Weiteren ist $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ mit $\mathcal{H} := L^2[0, 1]$ und $\langle h, \tilde{h} \rangle_{\mathcal{H}} := \int_0^1 h(s)\tilde{h}(s) ds$ für alle $h, \tilde{h} \in \mathcal{H}$ ein separabler Hilbert-Raum und nach Hsing und Eubank [24], Theorem 2.4.18 ist $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine ONB von \mathcal{H} , wobei für alle $s \in [0, 1]$ und $j \in \mathbb{N}$ gelte:

$$h_1(s) := 1, \quad h_{2j}(s) := \sqrt{2} \cos(2j\pi s), \quad h_{2j+1}(s) := \sqrt{2} \sin(2j\pi s). \quad (2.8)$$

Beweis. Siehe [42], S.5 – 7, 14 – 18, 29, Korollar I.2.11 und Korollar I.2.15. \square

Für das punktweise Produkt zweier Funktionen $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben wir $f \odot g$ mit $f^2 = f \odot f$, falls es wohldefiniert ist. $\ell^\infty[0, 1]$ und $\mathcal{C}[0, 1]$ sind bzgl. \odot abgeschlossen. Für L^p -Räume ist dies für kein $p \in [1, \infty)$ der Fall, da zwar f mit $f(t) := t^{-1/(p+1)} \mathbf{1}_{(0,1]}(t)$ für $t \in [0, 1]$, aber nicht f^2 Element von $L^p[0, 1]$ ist. Allerdings ist das folgende Lemma gültig.

Lemma 2.5. *Es sei $p \in [1, \infty)$. Dann gilt $x \odot y \in L^p[0, 1]$, wenn ...*

- (a) $x \in \ell^\infty[0, 1]$ und $y \in L^p[0, 1]$ bzw. $x \in L^p[0, 1]$ und $y \in \ell^\infty[0, 1]$ gilt. Dabei gilt $\|x \odot y\|_{L^p[0, 1]} \leq \|x\|_\infty \|y\|_{L^p[0, 1]}$ bzw. $\|x \odot y\|_{L^p[0, 1]} \leq \|x\|_{L^p[0, 1]} \|y\|_\infty$;
- (b) $x, y \in L^{2p}[0, 1]$ gilt, wobei dann $\|x \odot y\|_{L^p[0, 1]} \leq \|x\|_{L^{2p}[0, 1]} \|y\|_{L^{2p}[0, 1]}$ erfüllt ist.

Beweis. (a) folgt aus der Definition der Normen $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_{L^p[0, 1]}$; (b) folgt aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung. \square

2.3 Operatortheorie

Unter *Operatoren* verstehen wir lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen. Operatoren besitzen meist diverse Eigenschaften, die wir hier auflisten, wobei wir der Einfachheit halber davon ausgehen, dass die Operatoren zwischen Banach- bzw. zwischen Hilbert-Räumen abbilden. Nachfolgend stehen $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$, $(\mathcal{B}', \|\cdot\|_{\mathcal{B}'})$ sowie $(\mathcal{B}'', \|\cdot\|_{\mathcal{B}''})$ für Banach- und $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$, $(\mathcal{H}', \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}'})$, $(\mathcal{H}'', \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}''})$ sowie $(\mathcal{H}''', \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}'''})$ für Hilbert-Räume.

2.3.1 Beschränkte Operatoren

Definition und Eigenschaften 2.6 (beschränkter Operator). Wir bezeichnen einen Operator $A: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ als *beschränkt*, wenn ein $c \geq 0$ mit $\|Ab\|_{\mathcal{B}'} \leq c\|b\|_{\mathcal{B}}$ für alle $b \in \mathcal{B}$ existiert und schreiben für die Menge solcher Operatoren $\mathcal{L}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ mit $\mathcal{L}_{\mathcal{B}} := \mathcal{L}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$.

- (a) Ein Operator $A: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ ist genau dann beschränkt, wenn er stetig ist.

(b) Die kleinste Konstante, wofür ein Operator $A: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ beschränkt ist, d.h.

$$\|A\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}} := \inf \left\{ c \mid \|Ab\|_{\mathcal{B}'} \leq c\|b\|_{\mathcal{B}} \text{ für alle } b \in \mathcal{B} \right\},$$

erfüllt die fundamentale Ungleichung

$$\|Ab\|_{\mathcal{B}'} \leq \|A\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}} \|b\|_{\mathcal{B}} \quad (2.9)$$

für alle $b \in \mathcal{B}$. Ferner gilt

$$\|A\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}} = \sup_{b \in \mathcal{B} \setminus \{0_{\mathcal{B}}\}} \frac{\|Ab\|_{\mathcal{B}'}}{\|b\|_{\mathcal{B}}} = \sup_{\|b\|_{\mathcal{B}}=1} \|Ab\|_{\mathcal{B}'} = \sup_{\|b\|_{\mathcal{B}} \leq 1} \|Ab\|_{\mathcal{B}'}. \quad (2.10)$$

Versieht man $\mathcal{L}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ mit den Operationen $(A+B)(b) := Ab + Bb$ und $(\lambda A)(b) := \lambda Ab$ mit $A, B \in \mathcal{L}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $b \in \mathcal{B}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist $(\mathcal{L}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}})$ ein Banach-Raum.

(c) Für $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$ und $B \in \mathcal{L}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ gilt $AB \in \mathcal{L}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}$ mit

$$\|AB\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}} \leq \|A\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}} \|B\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}} \quad (2.11)$$

womit $(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ nach Teil (b) eine Banach-Algebra ist.

(d) Sei $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ invertierbar, so ist auch Inverse A^{-1} Element von $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$.

Beweis. Siehe [42], S.45 ff. und Korollar IV.3.4. □

Für technische Nachweise benötigen wir den nachfolgenden Satz. Dabei steht A^n mit $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ für die Komposition $A \circ \dots \circ A$ aus $n \in \mathbb{N}$ Faktoren und A^0 für die identische Abbildung $\mathbb{I}_{\mathcal{B}}$, die per Definition Element von $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ ist.

Satz 2.7 (Neumann'sche Reihe). *Es sei $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ ein Operator mit $\|A\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{B}}} < 1$. Dann konvergiert die Neumann'sche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ in $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$. Des Weiteren ist der Operator $\mathbb{I}_{\mathcal{B}} - A$ invertierbar mit*

$$(\mathbb{I}_{\mathcal{B}} - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \quad (2.12)$$

und es gilt $\|(\mathbb{I}_{\mathcal{B}} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{B}}} \leq (1 - \|A\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{B}}})^{-1}$.

Beweis. Siehe [42], Satz II.1.11. □

Im Folgenden geben wir die Definition und einige Eigenschaften von *Adjungierten* zwischen Hilbert-Räumen an, von welchen wir insbesondere in Nachweisen Gebrauch machen werden (für Adjungierte zwischen Banach-Räumen siehe [42], III.4).

Definition und Eigenschaften 2.8 (Adjungierte bei Hilbert-Räumen). Die *Adjungierte* eines Operators $B \in \mathcal{L}_{\mathcal{H},\mathcal{H}'}$ ist definiert als die Abbildung $B^*: \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$ mit

$$\langle B(h), h' \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle h, B^*(h') \rangle_{\mathcal{H}} \quad (2.13)$$

für alle $h \in \mathcal{H}$ und $h' \in \mathcal{H}'$, wobei B im Fall $B = B^*$ als *selbstadjungiert* bezeichnet werde.

Für $B, C \in \mathcal{L}_{\mathcal{H},\mathcal{H}'}$ sowie $D \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}',\mathcal{H}''}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $B^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}', \mathcal{H}}$ und $\|B\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}} = \|B^*\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}', \mathcal{H}}}$.
- (b) $(aB + bC)^* = aB^* + bC^*$, $(DB)^* = B^*D^*$ und $B^{**} = B$.
- (c) $\|B^*B\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} = \|BB^*\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}'}} = \|B\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}}^2$.
- (d) $\text{Kern}(B) = (\text{Bild}(B^*))^\perp$ und $\text{Kern}(B^*) = (\text{Bild}(B))^\perp$.
- (e) B ist genau dann injektiv, wenn $\text{Bild}(B^*)$ dicht liegt.
- (f) Liegt $\text{Bild}(B)$ dicht, so ist BB^* injektiv.

Beweis. Für (a) bis (e) siehe [42], S.239; (f) wäre BB^* nicht injektiv, obwohl $\text{Bild}(B)$ dicht liegt, so würde $(BB^*)(h') = 0_{\mathcal{H}'}$ für ein $h' \in \mathcal{H}'$ mit $h' \neq 0_{\mathcal{H}'}$ und folglich $B^*(h') = 0_{\mathcal{H}}$ gelten, womit B^* nicht injektiv wäre, was jedoch in Widerspruch zu (e) mit (b) steht. \square

2.3.2 Kompakte Operatoren

Die Definition *kompakter Operatoren* beruht auf kompakten Mengen. In metrischen Räumen (M, d_M) sind kompakte Mengen nichtleere Teilmengen M' mit der Eigenschaft, dass jede Folge $(m_n)_n \subseteq M'$ eine konvergente Teilfolge hat.

Definition und Eigenschaften 2.9 (kompakter Operator). Wir bezeichnen einen Operator $K: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ als *kompakt*, wenn die Menge $\overline{K(\mathcal{B}_\mathcal{B})}$ mit $\mathcal{B}_\mathcal{B} := \{b \in \mathcal{B} \mid \|b\|_\mathcal{B} \leq 1\}$ kompakt ist. Für die Menge solcher Operatoren schreiben wir $\mathcal{K}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ mit $\mathcal{K}_\mathcal{B} := \mathcal{K}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$.

- (a) Ein Operator $K \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ ist genau dann kompakt, wenn $K^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ kompakt ist.
- (b) $(\mathcal{K}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}})$ ist ein Banach-Raum.
- (c) Es gilt $\mathcal{K}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \subsetneq \mathcal{L}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$. Ferner gilt $AB \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$, wenn $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}$ und $B \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ oder wenn $A \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}$ und $B \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ gilt. Folglich ist $\mathcal{K}_\mathcal{B}$ ein zweiseitiges Ideal von $\mathcal{L}_\mathcal{B}$.
- (d) $\mathbb{I}_\mathcal{B}$ ist genau dann ein kompakter Operator, wenn $\dim(\mathcal{B}) < \infty$.
- (e) Ein kompakter Operator $K: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ besitzt im Fall $\dim(\mathcal{B}) = \infty$ keine beschränkte Inverse.

Beweis. Für (a) bis (c) siehe [42], S.66 f. und Satz III.4.4; (d) folgt aus dem Satz von Balzano-Weierstraß, Teil (a) und [24], Theorem 4.1.2; für (e) siehe [24], Theorem 4.1.4. \square

Nun untersuchen wir kompakte Operatoren zwischen Hilbert-Räumen, die wir häufig mit Hilfe des *Tensorproduktoperators* definieren. Der *Tensorproduktoperator* eines Elements $h \in \mathcal{H}$ mit einem weiteren Element $h' \in \mathcal{H}'$ ist definiert als die Abbildung $h \otimes h': \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$, $x \mapsto (h \otimes h')(x) := \langle h, x \rangle_\mathcal{H} h'$ (siehe Eigenschaften 2.17).

Satz 2.10 (Spektralsatz). *Es sei $K \in \mathcal{K}_\mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator. Dann existiert ein ONS $(h_j)_{j \in J}$ von \mathcal{H} und eine Nullfolge $(k_j)_{j \in J} \subseteq \mathbb{R}_{\neq 0}$ mit $J \subseteq \mathbb{N}$, sodass gilt:*

$$\mathcal{H} = \text{Kern}(K) \oplus \overline{\text{lin}\{h_j \mid j \in J\}}. \quad (2.14)$$

Das bedeutet, dass es sich bei dem Hilbert-Raum \mathcal{H} um die innere direkte Summe von $\text{Kern}(K)$ und $\overline{\text{lin}\{h_j | j \in J\}}$ handelt. Außerdem gilt

$$K = \sum_{j \in J} k_j(\mathfrak{k}_j \otimes \mathfrak{k}_j), \quad (2.15)$$

wobei k_j für die Eigenwerte und \mathfrak{k}_j für die zugehörigen Eigenfunktionen von K für alle $j \in J$ stehen. Dabei gilt $\|K\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} = \sup_{j \in J} |k_j|$.

Beweis. Siehe [42], Theorem VI.3.2. □

Singulärwerte ermöglichen eine Charakterisierung für kompakte Operatoren zwischen Hilbert-Räumen, welche wir im Anschluss angeben werden.

Definition und Eigenschaften 2.11 (Singulärwert). Es sei $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$. Dann ist der j -te Singulärwert von K mit $j \in \mathbb{N}$ definiert durch $s_j(K) := \sqrt{k_j}$, wobei $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ die nicht negative, o.B.d.A. monoton fallende Eigenwertfolge von $K^*K \in \mathcal{K}_{\mathcal{H}}$ sei.

(a) Es gilt $s_j(K) = s_j(K^*)$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

(b) Für jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt die Identität

$$s_j(K) = \min_{\dim(U)=j-1} \max_{h \in U^\perp, h \neq 0_{\mathcal{H}}} \frac{\|Kh\|_{\mathcal{H}'}}{\|h\|_{\mathcal{H}}}, \quad (2.16)$$

wobei U Unterräume von \mathcal{H} seien und U^\perp das orthogonale Komplement von U sei.

(c) Für beliebige Operatoren $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}'', \mathcal{H}'''}$, $B \in \mathcal{K}_{\mathcal{H}', \mathcal{H}''}$ und $C \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$ gilt für alle $j \in \mathbb{N}$:

$$s_j(ABC) \leq \|A\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}'', \mathcal{H}'''}} s_j(B) \|C\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}}. \quad (2.17)$$

Beweis. Für (a) und (b) siehe Gohberg et al. [19], S.96 ff.; (c) folgt unmittelbar aus (a) und (b), sowie elementaren Umformungen. □

Definition und Satz 2.12 (Singulärwertzerlegung). Es sei $K \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$ und $(\mathfrak{k}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ bzw. $(\mathfrak{k}'_j)_{j \in \mathbb{N}}$ seien die Eigenfunktionenfolgen von $K^*K \in \mathcal{K}_{\mathcal{H}}$ bzw. $KK^* \in \mathcal{K}_{\mathcal{H}'}$. Dann ist K genau dann ein kompakter Operator, wenn K eine Singulärwertzerlegung hat, d.h.:

$$K = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(K) (\mathfrak{k}_j \otimes \mathfrak{k}'_j). \quad (2.18)$$

Beweis. Siehe [24], Theorem 4.3.1 und Theorem 4.3.5. □

2.3.3 Schatten-Klassen-Operatoren

Definition und Eigenschaften 2.13 (Schatten-Klassen-Operator). Im Folgenden sei $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$ ein beschränkter Operator und $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$ ein kompakter Operator mit

$(s_j(K))_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N})$ für ein $p \in [1, \infty)$. Dann bezeichnen wir A als *Schatten-Klassen-Operator der Ordnung ∞* und K als *Schatten-Klassen-Operator der Ordnung p* . Für die Menge der Schatten-Klassen-Operatoren mit Ordnung $p \in [1, \infty]$ von \mathcal{H} nach \mathcal{H}' , sogenannter p -ter Schatten-Klasse, schreiben wir $\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}^p$ mit $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}^p = \mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}}^p$.

- (a) $(\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}^p, \|\cdot\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}^p})$ sind Banach-Räume für alle $p \in [1, \infty]$ mit $\|\cdot\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}^\infty} := \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}}$ und für $p \in [1, \infty)$ mit $P \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}^p$ gilt

$$\|P\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}^p} := \left(\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(P) \right)^{1/p}. \quad (2.19)$$

- (b) Es seien $p, q \in [1, \infty]$ mit $p \leq q$ und es sei $P \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}^p$. Dann gilt $P \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}^q$ mit

$$\|P\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}^q} \leq \|P\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}^p}. \quad (2.20)$$

- (c) Ein Operator P ist genau dann Element von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}^p$ mit $p \in [1, \infty]$, wenn P^* Element von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}', \mathcal{H}}^p$ ist. Dabei gilt $\|P\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}^p} = \|P^*\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}', \mathcal{H}}^p}$.

Beweis. (a) und (b) folgen aus der Definition der Normen in (2.19); (c) für $p = \infty$ siehe Definition und Eigenschaften 2.8 (a) und für $p \in [1, \infty)$ folgt die Behauptung aus Definition und Eigenschaften 2.9 (a), Definition und Eigenschaften 2.11 (a) sowie der Definition der Normen der Schatten-Klassen-Operatoren. \square

Im Folgenden stellen wir eine Hölder-Ungleichung für Schatten-Klassen-Operatoren auf, die insbesondere in Kapitel 4 Anwendung findet.

Satz 2.14 (operatorwertige Hölder-Ungleichung). *Es sei $A \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}', \mathcal{H}''}^q$ und $B \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}^p$. Ferner seien $p, q, r \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, wobei $\frac{1}{\infty} := 0$ gelte. Dann gilt $AB \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}''}^r$ mit*

$$\|AB\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}''}^r} \leq \left(\mathbf{1}_{[1, \infty)}(\max(p, q)) 2^{1/r} + \mathbf{1}_{\{\infty\}}(\max(p, q)) \right) \|A\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}', \mathcal{H}''}^q} \|B\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}^p}. \quad (2.21)$$

Beweis. Siehe [25], Satz 11.2. \square

Die beiden wichtigsten Schatten-Klassen-Operatoren neben beschränkten Operatoren sind *nukleare* und *Hilbert-Schmidt-Operatoren*. *Nukleare Operatoren* sind die Schatten-Klassen-Operatoren $N: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ der Ordnung 1, für deren Klasse wir $\mathcal{N}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$ statt $\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}^1$ mit $\mathcal{N}_{\mathcal{H}} = \mathcal{N}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}}$ schreiben und *Hilbert-Schmidt-Operatoren* sind die Schatten-Klassen-Operatoren $S: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ der Ordnung 2, für deren Klasse wir $\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$ statt $\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}^2$ mit $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}}$ schreiben. Nach [24], Theorem 4.4.5 ist $(\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}})$ ein separabler Hilbert-Raum, wobei das Skalarprodukt aller $S, \tilde{S} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$ für jede ONB $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von \mathcal{H} durch

$$\langle S, \tilde{S} \rangle_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}} := \sum_{j=1}^{\infty} \langle S(h_j), \tilde{S}(h_j) \rangle_{\mathcal{H}'} \quad (2.22)$$

definiert sei, womit für die durch $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}}$ induzierte Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}}$ für $S \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$ gilt

$$\|S\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|S(h_j)\|_{\mathcal{H}'}^2. \quad (2.23)$$

Nachfolgend sei $(h'_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine ONB von \mathcal{H}' . Dann ist $(\Phi_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ mit

$$\Phi_{ij} := h_i \otimes h'_j \quad (2.24)$$

für alle i, j nach [24], Theorem 4.4.5 eine ONB von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$, die wir als *durch $(h_j)_j$ und $(h'_j)_j$ induzierte ONB von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$* und im Fall $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ mit $h_j = h'_j$ für alle j als *durch $(h_j)_j$ induzierte ONB von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$* bezeichnen.

Im Folgenden geben wir die Definition und Eigenschaften von *Integraloperatoren* an. Der Einfachheit halber definieren wir diese Operatoren ausschließlich für $\mathcal{H} = L^2[0, 1]$.

Definition und Eigenschaften 2.15 (Integraloperator). Es sei $k: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Wir bezeichnen $K: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ mit

$$(K(x))(t) := \int_0^1 k(s, t)h(s) ds \quad (2.25)$$

für $h \in \mathcal{H}$ und λ -f.a. $t \in [0, 1]$ als *Integraloperator*, falls das Integral existiert. Die Funktion k wird dann als *Kern* des Integraloperators K bezeichnet.

Integraloperatoren K mit der Darstellung (2.25) besitzen die folgenden Eigenschaften.

- (a) $(K^*(x))(s) = \int k(s, t)h(t) dt$ für alle $h \in \mathcal{H}$ und $s \in [0, 1]$. Demzufolge ist K genau dann selbstadjungiert, wenn $k(s, t) = k(t, s)$ für λ^2 -f.a. $(s, t) \in [0, 1]^2$ gilt.
- (b) Es gilt $K: \mathcal{H}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{H}_{\geq 0}$ mit $\mathcal{H}_{\geq 0} := \{x \in \mathcal{H} \mid x(s) \geq 0 \text{ für } \lambda\text{-f.a. } s \in [0, 1]\}$, falls $k(s, t) \geq 0$ für λ^2 -f.a. $(s, t) \in [0, 1]^2$ gilt.
- (c) Es gilt $K \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ genau dann, wenn $\int_0^1 \int_0^1 k^2(s, t) ds dt < \infty$. Dabei gilt für $K \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$:

$$\|K\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = \int_0^1 \int_0^1 k^2(s, t) ds dt. \quad (2.26)$$

Beweis. (a) und (b) folgen aus elementaren Umformungen; (c) ist ein Spezialfall von [13], Proposition B1.7. \square

Nun geben wir diverse Eigenschaften operatorwertiger Matrizen an.

Lemma 2.16. Im Folgenden seien $l, m, n \in \mathbb{N}$, es sei $\mathbf{T} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}^l, \mathcal{H}^m}$ und es gelte $\mathbf{A} := (A_{ij})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n} \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}}^{m \times n}$ sowie $\mathbf{S} := (S_{ij})_{i=1, \dots, l, j=1, \dots, m} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{l \times m}$.

- (a) Die operatorwertige Matrix \mathbf{A} ist Element von $\mathcal{L}_{\mathcal{H}^n, \mathcal{H}^m}$ und es gilt:

$$\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^n, \mathcal{H}^m}}^2 \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \|A_{ij}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^2. \quad (2.27)$$

Ferner ist \mathbf{A}^* Element von $\mathcal{L}_{\mathcal{H}^m, \mathcal{H}^n}$ mit $\mathbf{A}^* = (A_{ji}^*)_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n} \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}}^{n \times m}$.

- (b) Die operatorwertige Matrix \mathbf{S} ist Element von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}^m, \mathcal{H}^l}$, die zugehörige Adjungierte $\mathbf{S}^* = (S_{ji}^*)_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, l}$ ist folglich Element von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}^l, \mathcal{H}^m}$ und es gilt

$$\|\mathbf{S}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^m, \mathcal{H}^l}}^2 = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \|S_{ij}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = \|\mathbf{S}^*\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^l, \mathcal{H}^m}}^2. \quad (2.28)$$

(c) Für alle $\mathbf{T} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}^l, \mathcal{H}^m}$ existieren $T_{11}, \dots, T_{lm} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ mit $\mathbf{T} := (T_{ij})_{i=1, \dots, l, j=1, \dots, m} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{l \times m}$.

Beweis.

(a) $\mathbf{A}: \mathcal{H}^n \rightarrow \mathcal{H}^m$ ist ein Operator und nach der Cauchy-Schwarz'scher Ungleichung gilt für alle $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathcal{H}^n$ mit $\tilde{x}_j := x_j \cdot \mathbf{1}_{\{\mathcal{H} \setminus 0_{\mathcal{H}}\}}(x_j) \|x_j\|_{\mathcal{H}}^{-1}$ für alle j :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}(\mathbf{x})\|_{\mathcal{H}^m}^2 &= \sum_{i=1}^m \left\| \sum_{j=1}^n A_{ij}(x_j) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \|A_{ij}(\tilde{x}_j)\|_{\mathcal{H}} \|x_j\|_{\mathcal{H}} \right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \|A_{ij}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^2 \sum_{k=1}^n \|x_k\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}^n}^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \|A_{ij}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^2 < \infty. \end{aligned}$$

Folglich gilt $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}^n, \mathcal{H}^m}$ und per Definition der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^n, \mathcal{H}^m}}$ gilt auch (2.27).

(b) Da S_{11}, \dots, S_{lm} Elemente von $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ sind, gilt $\mathbf{S} \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}^m, \mathcal{H}^l}$ nach (a) und für jede durch eine ONB $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von \mathcal{H} induzierte ONB $(h_{m,k})_{k \in \mathbb{N}}$ von \mathcal{H}^m gilt per Definition von \mathbf{S} :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\mathbf{S}(h_{m,k})\|_{\mathcal{H}^l}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \|S_{ij}(h_k)\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \|S_{ij}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 < \infty.$$

Damit gilt $\mathbf{S} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}^m, \mathcal{H}^l}$ und die erste Identität in (2.28). Die zweite Identität in (2.28) folgt bei gleicher Vorgehensweise unmittelbar aus der Definition von $\mathbf{S}^* \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}^l, \mathcal{H}^m}$.

(c) Im Folgenden seien $(h_{l,j})_{j \in \mathbb{N}}$ bzw. $(\tilde{h}_{m,j})_{j \in \mathbb{N}}$ ONBs von \mathcal{H}^m bzw. \mathcal{H}^l und $(\Phi_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ sei eine durch $(h_{l,j})_j$ und $(\tilde{h}_{m,j})_j$ induzierte ONB von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}^l, \mathcal{H}^m}$. Dann gilt per Definition des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}^l}$ für alle i, j und $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_l)^T \in \mathcal{H}^l$ zunächst

$$\Phi_{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \mathbf{x}, h_{l,k} \rangle_{\mathcal{H}^l} \Phi_{ij}(h_{l,k}) = \sum_{p=1}^l \langle x_p, h_{l,i}^{(p)} \rangle_{\mathcal{H}} \tilde{h}_{m,j},$$

wobei $h_{l,i}^{(p)}$ die p -te Komponente von $h_{l,i} \in \mathcal{H}^l$ mit $p \in \mathbb{N}_{\leq l}$ sei. Folglich kann Φ_{ij} für alle i, j als operatorwertige $l \times m$ -Matrix mit den Einträgen $\Phi_{ij,pq} := h_{l,i}^{(p)} \otimes \tilde{h}_{m,j}^{(q)} = \langle h_{l,i}^{(p)}, \cdot \rangle_{\mathcal{H}} \tilde{h}_{m,j}^{(q)}$ mit $p \in \mathbb{N}_{\leq l}$ und $q \in \mathbb{N}_{\leq m}$ dargestellt werden, wobei die Einträge nach Eigenschaften 2.17 Elemente von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ sind. Somit hat jeder Operator $\mathbf{T} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}^l, \mathcal{H}^m}$ die Gestalt

$$\mathbf{T} = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle \mathbf{T}, \Phi_{ij} \rangle_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^l, \mathcal{H}^m}} \Phi_{ij} = \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} \langle \mathbf{T}, \Phi_{ij} \rangle_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^l, \mathcal{H}^m}} h_{l,i}^{(p)} \otimes \tilde{h}_{m,j}^{(q)} \right)_{p=1, \dots, l, q=1, \dots, m}$$

und ist demzufolge ein Element von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{l \times m}$. □

2.3.4 Beschränkte Operatoren mit endlichdimensionalem Bild

Für die Klasse beschränkter Operatoren $A: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ mit endlichdimensionalem Bild schreiben wir $\mathcal{F}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ mit $\mathcal{F}_{\mathcal{B}} = \mathcal{F}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$. Es gilt $\mathcal{F}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \subsetneq \mathcal{K}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'} \subsetneq \mathcal{N}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$ und es gilt $AB \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$, wenn $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}$ und $B \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ oder wenn $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}$ und $B \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ gelte. Wichtige Vertreter dieser Operatoren sind Tensorproduktoperatoren und Projektoren.

Eigenschaften 2.17. Für $h \in \mathcal{H}, h' \in \mathcal{H}'$ ist $h \otimes h': \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ ein beschränkter Operator mit endlichdimensionalem Bild mit $\|h \otimes h'\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}} = \|h\|_{\mathcal{H}} \|h'\|_{\mathcal{H}'}$.

Beweis. Für alle $h \in \mathcal{H}$ und $h' \in \mathcal{H}'$ ist $h \otimes h'$ per Definition Element von $\mathcal{F}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$, somit auch von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$ und nach der Parseval'schen Gleichung gilt mit einer ONB $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von \mathcal{H}

$$\|h \otimes h'\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}}^2 = \|h'\|_{\mathcal{H}'}^2 \sum_{j=1}^{\infty} \langle h, h_j \rangle_{\mathcal{H}}^2 = \|h\|_{\mathcal{H}} \|h'\|_{\mathcal{H}'}^2. \quad \square$$

Definition und Eigenschaften 2.18 (Projektor). Es sei $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine ONB von \mathcal{H} und $J \subseteq \mathbb{N}$ sei eine nichtleere Menge. Der *orthogonale Projektionsoperator*, kurz *Projektor*, auf den Unterraum $\mathcal{J} := \overline{\text{lin}\{h_j \mid j \in J\}} \subseteq \mathcal{H}$ wird dann definiert als die Abbildung $\Pi_{\mathcal{J}}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, h \mapsto \sum_{j \in J} \langle h, h_j \rangle_{\mathcal{H}} h_j$. Ferner schreiben wir $\Pi_{h_m}^{h_n}$ im Fall $J := \{m, m+1, \dots, n\}$ für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ und $\Pi_{h_m}^{h_{\infty}}$ im Fall $J := \mathbb{N}_{\geq m}$ mit $m \in \mathbb{N}$.

- (a) $\Pi_{\mathcal{J}}$ ist ein selbstadjungierter, beschränkter Operator mit $\|\Pi_{\mathcal{J}}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} = 1$ sowie $\Pi_{\mathcal{J}}^k = \Pi_{\mathcal{J}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für endliche Mengen J gilt außerdem: $\Pi_{\mathcal{J}} \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$.
- (b) Es sei A ein selbstadjungierter, kompakter Operator mit $A = \sum_{j=1}^{\infty} a_j (h_j \otimes h_j)$. Dann gilt: $\Pi_{\mathcal{J}} A = A \Pi_{\mathcal{J}}$.

Beweis. Folgt aus der Definition von $\Pi_{\mathcal{J}}$ und fundamentalen Umformungen. \square

2.4 Funktionale Zufallsvariablen

In diesem Abschnitt definieren wir wahrscheinlichkeitstheoretische Konvergenzbegriffe und den Erwartungswert von *funktionalen Zufallsvariablen*. Nachfolgend sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ sei ein separabler Banach-Raum versehen mit der Borel'schen σ -Algebra $\mathbb{B}(\mathcal{B})$ und $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ sei ein separabler Hilbert-Raum versehen mit der Borel'schen σ -Algebra $\mathbb{B}(\mathcal{H})$. Unter *funktionalen Zufallsvariablen* verstehen wir Zufallsvariablen $X: \Omega \rightarrow \mathcal{B}$, wobei Separabilität von \mathcal{B} vorausgesetzt wird, um bspw. zu gewährleisten, dass eine Summe von \mathcal{B} -wertigen Zufallsvariablen wieder eine \mathcal{B} -wertige Zufallsvariable ergibt (siehe [31], S.37 f. und [7], S.21 f.). Ferner handelt es sich nach [7], Lemma 1.2 bei einer Abbildung $X: \Omega \rightarrow \mathcal{B}$ genau dann um eine Zufallsvariable, wenn $A(X): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}, \mathbb{R}}$ Zufallsvariablen sind und $X: \Omega \rightarrow \mathcal{H}$ ist nach [24], Theorem 7.1.2 genau dann eine Zufallsvariable, wenn $\langle X, h \rangle_{\mathcal{H}}$ für alle $h \in \mathcal{H}$ Zufallsvariablen sind, wobei die Verteilung einer \mathcal{H} -wertigen Zufallsvariable X unter \mathbb{P} eindeutig durch die Verteilungen von $\langle X, h \rangle_{\mathcal{H}}$ für alle $h \in \mathcal{H}$ bestimmt ist.

2.4.1 Konvergenzbegriffe und stochastische Landau-Symbole

Hier werden wir für \mathcal{B} -wertige Zufallsvariablen sowohl diverse stochastische Konvergenzbegriffe als auch stochastische Landau-Symbole definieren.

Definition 2.19. Eine Folge von \mathcal{B} -wertigen Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen eine \mathcal{B} -wertige Zufallsvariable X ...

- (a) \mathbb{P} -f.s., in Zeichen (i.Z.) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}\text{-f.s.}} X$, falls $\mathbb{P}(\|X_n - X\|_{\mathcal{B}} \rightarrow 0) = 1$ gilt;

- (b) *im p -ten Mittel* mit $p \geq 1$ und $X \in L_{\mathcal{B}}^p$, i.Z. $X_n \xrightarrow{L_{\mathcal{B}}^p} X$, falls $\mathbb{E}||X_n - X||_{\mathcal{B}}^p \rightarrow 0$ gilt, wobei $L_{\mathcal{B}}^p$ der Bochner- L^p -Raum aus dem nachfolgenden Abschnitt 2.4.2 sei;
- (c) *\mathbb{P} -stochastisch*, i.Z. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, falls $\mathbb{P}(|X_n - X|_{\mathcal{B}} > \varepsilon) \rightarrow 0$ für alle $\varepsilon > 0$ gilt. \blacklozenge

Auch für \mathcal{B} -wertige Zufallsvariablen folgt sowohl aus Konvergenz \mathbb{P} -f.s. als auch aus Konvergenz im p -ten Mittel für alle $p \geq 1$ \mathbb{P} -stochastische Konvergenz (siehe [7], S.45).

Definition 2.20. Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von \mathcal{B} -wertigen Zufallsvariablen und es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \infty)$ eine Zahlenfolge. Dann wird die Folge $(\frac{X_n}{a_n})_n$ als *straff* bezeichnet, wenn

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n|_{\mathcal{B}} > ca_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X_n = O_{\mathbb{P}}(a_n) \quad (2.29)$$

gilt und wir schreiben $X_n = o_{\mathbb{P}}(a_n)$, wenn $(\frac{X_n}{a_n})_n$ \mathbb{P} -stochastisch gegen Null konvergiert. \blacklozenge

In diversen Umformungen werden wir unter anderem von den folgenden Rechenregeln für stochastische Landau-Symbole Gebrauch machen.

Lemma 2.21. *Es sei $a \neq 0$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \infty)$ seien Zahlenfolgen und $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sowie $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien Folgen von \mathcal{B} -wertigen Zufallsvariablen. Dann gilt:*

- (a) $X_n \pm Y_n = O_{\mathbb{P}}(a_n)$, falls $X_n = O_{\mathbb{P}}(a_n)$ sowie $Y_n = O_{\mathbb{P}}(a_n)$ gilt und es gilt $X_n \pm Y_n = o_{\mathbb{P}}(a_n)$, falls $X_n = o_{\mathbb{P}}(a_n)$ und $Y_n = O_{\mathbb{P}}(a_n)$ gilt.
- (b) $||X_n||_{\mathcal{B}} ||Y_n||_{\mathcal{B}} = O_{\mathbb{P}}(a_n b_n)$, falls $X_n = O_{\mathbb{P}}(a_n)$ sowie $Y_n = O_{\mathbb{P}}(a_n)$ gilt und es gilt $||X_n||_{\mathcal{B}} ||Y_n||_{\mathcal{B}} = o_{\mathbb{P}}(a_n b_n)$, falls $X_n = o_{\mathbb{P}}(a_n)$ und $Y_n = O_{\mathbb{P}}(b_n)$ gilt.
- (c) $||X_n||_{\mathcal{B}}^r = O_{\mathbb{P}}(a_n^r)$ und $a_n^{-r} = O_{\mathbb{P}}(||X_n||_{\mathcal{B}}^r)$ für alle $r > 0$, falls $X_n = O_{\mathbb{P}}(a_n)$ gilt.
- (d) $X_n = O_{\mathbb{P}}(a_n)$ mit $\mathbb{P}(|X_n|_{\mathcal{B}} > \varepsilon) = O(a_n)$ für alle $\varepsilon > 0$, falls $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine $L_{\mathcal{B}}^1$ -Zeitreihe mit $\mathbb{E}||X_n||_{\mathcal{B}} = O(a_n)$ ist.

Beweis. Folgt aus elementaren Umformungen. \square

2.4.2 Erwartungswerte in separablen Banach- und Hilbert-Räumen

Hier beschäftigen wir uns mit dem Erwartungswert von \mathcal{B} - und \mathcal{H} -wertigen Zufallsvariablen (siehe [24], S.40 – 45).

Definition 2.22 (Erwartungswert). Eine *einfache Zufallsvariable* $X: \Omega \rightarrow \mathcal{B}$, d.h., es gibt Ereignisse $A_1, \dots, A_k \in \mathfrak{A}$ sowie $b_1, \dots, b_k \in \mathcal{B}$ für ein $k \in \mathbb{N}$ mit $X(\omega) = \sum_{i=1}^k \mathbf{1}_{A_i}(\omega) b_i$ für alle $\omega \in \Omega$, heißt \mathbb{P} -Bochner-integrierbar, falls $\mathbb{P}(A_i) < \infty$ für $i = 1, \dots, k$ gilt, wobei der Erwartungswert von X dann definiert ist durch

$$\mathbb{E}(X) := \int_{\Omega} X \, d\mathbb{P} \in \mathcal{B}.$$

Des Weiteren wird eine beliebige Zufallsvariable $X: \Omega \rightarrow \mathcal{B}$ als \mathbb{P} -Bochner-integrierbar bezeichnet, falls eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von einfachen, \mathcal{B} -wertigen, \mathbb{P} -Bochner-integrierbaren Zufallsvariablen mit $\int_{\Omega} \|X_n - X\|_{\mathcal{B}} d\mathbb{P} \rightarrow 0$ existiert, wobei der Erwartungswert von X dann definiert ist durch

$$\mathbb{E}(X) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} X_n d\mathbb{P}. \quad (2.30)$$

Für jede \mathbb{P} -Bochner-integrierbare Zufallsvariable $X: \Omega \rightarrow \mathcal{B}$ und jedes Ereignis $A \in \mathfrak{A}$ schreiben wir außerdem $\int_A X d\mathbb{P} := \int \mathbf{1}_A X d\mathbb{P}$. \blacklozenge

Für Erwartungswerte \mathcal{B} -wertiger Zufallsvariablen sind analog zu reellwertigen Zufallsvektoren die im Folgenden genannten Eigenschaften gültig. Anschließend geben wir L^p -Räume \mathcal{B} -wertiger Zufallsvariablen samt ihrer Eigenschaften an und definieren danach den bedingten Erwartungswert für Bochner-integrierbare Zufallsvariablen.

Eigenschaften 2.23. Im Folgenden seien $X, Y, Z: \Omega \rightarrow \mathcal{B}$ Zufallsvariablen, wobei Y, Z \mathbb{P} -Bochner-integrierbar seien und F sei ein Funktionenraum mit Definitionsbereich $[0, 1]$.

- (a) $\mathbb{E}\|X\|_{\mathcal{B}} < \infty$ impliziert \mathbb{P} -Bochner-Integrierbarkeit von X .
- (b) Für einfache Zufallsvariablen X mit $\mathbb{P}(X = b) = 1$ für ein $b \in \mathcal{B}$ gilt $\mathbb{E}(X) = b$.
- (c) $\alpha Y + \beta Z$ ist eine \mathbb{P} -Bochner-integrierbare Zufallsvariable für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}(X) + \beta \mathbb{E}(Y)$.
- (d) Für \mathbb{P} -Bochner-integrierbare Zufallsvariablen X gilt $\|\mathbb{E}(X)\|_{\mathcal{B}} \leq \mathbb{E}\|X\|_{\mathcal{B}}$.
- (e) Im Fall $\mathcal{B} = F$ und $X \leq_F Y$ f.s. gilt $\mathbb{E}(X) \leq_F \mathbb{E}(Y)$.
- (f) $B(Y)$ ist \mathbb{P} -Bochner-integrierbar für alle $B \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ mit $\mathbb{E}(B(Y)) = B(\mathbb{E}(Y))$.
- (g) Im Fall $Y \in U$ f.s. für einen abgeschlossenen Unterraum $U \subseteq \mathcal{B}$ gilt $\mathbb{E}(Y) \in U$.
- (h) Für $\mathcal{B} = F$ gilt $(\mathbb{E}(Y))(t) = \mathbb{E}(Y(t))$ für λ -f.a. $t \in [0, 1]$.

Beweis. (a) siehe [7], Lemma 1.4; (b), (c), (e), (g) und (h) folgen aus der Definition des Erwartungswertes; (d) siehe [24], Theorem 2.6.7; (f) siehe [24], Theorem 3.1.7. \square

Definition und Eigenschaften 2.24 (Bochner- L^p -Raum). Es sei $p \in [1, \infty)$. Dann bezeichnen wir den Faktorraum $L^p_{(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, kurz $L^p_{\mathcal{B}}$, des halbnormierten Raums $(\mathcal{L}^p_{(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}), \nu_{p, \mathcal{B}})$ als *Bochner- L^p -Raum*, wobei

$$\mathcal{L}^p_{(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) := \left\{ X \mid X: \Omega \rightarrow \mathcal{B} \text{ ist eine Zufallsvariable mit } \mathbb{E}\|X\|_{\mathcal{B}}^p < \infty \right\}$$

und $\nu_{p, \mathcal{B}}(X) := (\mathbb{E}\|X\|_{\mathcal{B}}^p)^{1/p}$ für alle $X \in \mathcal{L}^p_{(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ gelte.

- (a) $(L^p_{\mathcal{B}}, \nu_{p, \mathcal{B}})$ ist ein separabler Banach-Raum für alle $p \in [1, \infty)$.
- (b) $(L^2_{\mathcal{H}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2_{\mathcal{H}}})$ ist ein separabler Hilbert-Raum, wobei das Skalarprodukt für $X, Y \in L^2_{\mathcal{H}}$ sei definiert durch $\langle X, Y \rangle_{L^2_{\mathcal{H}}} := \mathbb{E}\langle X, Y \rangle_{\mathcal{H}}$.

(c) Für alle p, q mit $1 \leq p < q < \infty$ gilt $L_{\mathcal{B}}^q \subsetneq L_{\mathcal{B}}^p$.

Beweis. Siehe Nachweise und Bemerkungen in [42], S.14 – 19, 29, Korollar I.2.15. \square

Definition und Eigenschaften 2.25 (bedingter Erwartungswert). Im Folgenden sei \mathfrak{A}' mit $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$ eine weitere σ -Algebra. Dann ist der *bedingte Erwartungswert bzgl. \mathfrak{A}'* definiert als die Abbildung $\mathbb{E}[\cdot | \mathfrak{A}'] : L_{(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \rightarrow L_{(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})}^1(\Omega, \mathfrak{A}', \mathbb{P})$ mit

$$\int_{A'} \mathbb{E}[X | \mathfrak{A}'] \, d\mathbb{P} = \int_{A'} X \, d\mathbb{P}$$

für alle $A' \in \mathfrak{A}'$ und $X \in L_{(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Des Weiteren stehe $\mathbb{E}[X | Y]$ für $\mathbb{E}[X | \sigma(Y)]$ mit $X \in L_{(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ und einer Zufallsvariable $Y : \Omega \rightarrow \mathcal{B}$.

Für bedingte Erwartungswerte bzgl. einer σ -Algebra \mathfrak{A}' mit $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$ und \mathbb{P} -Bochner-integrierbaren Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \rightarrow \mathcal{B}$ gelten dabei die folgenden Eigenschaften:

(a) $\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y | \mathfrak{A}'] = \alpha \mathbb{E}[X | \mathfrak{A}'] + \beta \mathbb{E}[Y | \mathfrak{A}']$ f.s. für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(b) $\|\mathbb{E}[X | \mathfrak{A}']\|_{\mathcal{B}} \leq \mathbb{E}[\|X\|_{\mathcal{B}} | \mathfrak{A}']$ f.s.

(c) $B(\mathbb{E}[X | \mathfrak{A}']) = \mathbb{E}[B(X) | \mathfrak{A}']$ f.s. für alle $B \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$.

(d) $\mathbb{E}[X | \mathfrak{A}'] = \mathbb{E}(X)$ f.s., falls X unabhängig von \mathfrak{A}' ist.

(e) $\mathbb{E}[X | \mathfrak{A}'] = X$ f.s., falls $X \in L_{(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})}^1(\Omega, \mathfrak{A}', \mathbb{P})$ gilt.

Beweis. Siehe [7], S.29 f. \square

In Hilbert-Räumen können aufgrund der Existenz eines Skalarprodukts die folgenden nützlichen Operatoren definiert und Resultate angegeben werden.

Korollar 2.26. Für zwei beliebige $L_{\mathcal{H}}^2$ -wertige Zufallsvariablen X, Y gilt

$$\mathbb{E}\langle X, \mathbb{E}(Y) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y) \rangle_{\mathcal{H}} = \mathbb{E}\langle \mathbb{E}(X), Y \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Beweis. Folgt aus der Eigenschaft 2.23 (f). \square

Satz 2.27. Für jede Zufallsvariable $X \in L_{\mathcal{H}}^2$ gilt

$$\mathbb{E}\|X - \mathbb{E}(X)\|_{\mathcal{H}}^2 = \mathbb{E}\|X\|_{\mathcal{H}}^2 - \|\mathbb{E}(X)\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Beweis. Siehe [24], Theorem 7.2.2. \square

Nun führen wir den *Kovarianzoperator* für \mathcal{H} -wertige Zufallsvariablen ein (für eine Definition in Banach-Räumen siehe [7], S.30 ff.). Dabei gehen wir der Einfachheit halber oft von zentrierten Zufallsvariablen aus, was keine wirkliche Einschränkung ist, da $Y := X - \mathbb{E}(X)$ eine zentrierte Zufallsvariable für jede Bochner-integrierbare Zufallsvariable X ist.

Definition und Eigenschaften 2.28 (Kovarianzoperator). Der Kovarianzoperator einer $L^2_{\mathcal{H}}$ -wertigen Zufallsvariable X ist definiert als $\mathcal{C}_X := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X)) \otimes (X - \mathbb{E}(X)))$.

Für beliebige $L^2_{\mathcal{H}}$ -wertige Zufallsvariablen X und für zentrierte, $L^2_{\mathcal{H}}$ -wertige Zufallsvariablen Y besitzt der Kovarianzoperator die folgende Eigenschaften:

(a) $\mathcal{C}_X := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X)) \otimes (X - \mathbb{E}(X))) = \mathbb{E}(X \otimes X) - (\mathbb{E}(X)) \otimes (\mathbb{E}(X))$.

(b) $\mathcal{C}_Y \in \mathcal{N}_{\mathcal{H}}$ ist ein selbstadjungierter, positiv semidefiniter, nuklearer Operator mit

$$\|\mathcal{C}_Y\|_{\mathcal{N}_{\mathcal{H}}} = \mathbb{E}\|Y\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (2.31)$$

(c) Es gilt $Y \in \overline{\text{Bild}(\mathcal{C}_Y)}$ f.s. Des Weiteren gilt $Y = \sum_{j=1}^{\infty} \langle Y, \mathbf{c}_j \rangle_{\mathcal{H}} \mathbf{c}_j$ f.s., falls $\mathcal{C}_Y = \sum_{j=1}^{\infty} c_j (\mathbf{c}_j \otimes \mathbf{c}_j)$ gilt, wobei $\langle Y, \mathbf{c}_j \rangle_{\mathcal{H}}$ zentrierte, unkorrelierte Zufallsvariablen mit Varianzen c_j für alle j sind.

(d) \mathcal{C}_Y ist ein Integraloperator mit Kern $k_Y(s, t) := \text{cov}(Y(s), Y(t))$ für alle $s, t \in [0, 1]$, falls $\mathcal{H} = \mathcal{H} := L^2[0, 1]$ gilt.

Beweis. Siehe [24], Theoreme 7.2.4, 7.2.5, 7.2.7 und S.189. □

Mit Hilfe der folgenden Operatoren lässt sich die Kovarianzstruktur zweier Zufallsvariablen untersuchen, die nicht notwendigerweise Werte im gleichen Raum annehmen.

Definition und Eigenschaften 2.29 (Kreuzkovarianzoperator). Wir definieren den Kreuzkovarianzoperator einer $L^2_{\mathcal{H}}$ -wertigen Zufallsvariablen X und einer $L^2_{\mathcal{H}'}$ -wertigen Zufallsvariablen $Y \in L^2_{\mathcal{H}'}$ durch $\mathcal{C}_{X,Y} := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X)) \otimes (Y - \mathbb{E}(Y)))$.

Für zentrierte Zufallsvariablen X und Y hat $\mathcal{C}_{X,Y}$ die folgenden Eigenschaften.

(a) $\mathcal{C}_{X,Y} \in \mathcal{N}_{\mathcal{H},\mathcal{H}'}$ ist ein nuklearer Operator mit $\mathcal{C}_{X,Y}^* = \mathcal{C}_{Y,X} \in \mathcal{N}_{\mathcal{H}',\mathcal{H}}$ und es gilt

$$\|\mathcal{C}_{X,Y}\|_{\mathcal{N}_{\mathcal{H},\mathcal{H}'}} = \|\mathcal{C}_{Y,X}\|_{\mathcal{N}_{\mathcal{H}',\mathcal{H}}} \leq \mathbb{E}\|X\|_{\mathcal{H}}\|Y\|_{\mathcal{H}'}. \quad (2.32)$$

(b) $\mathcal{C}_{X,Y}$ ist ein Integraloperator mit Kern $k_{X,Y}(s, t) := \text{cov}(X(s), Y(t))$ für $s, t \in [0, 1]$, falls $\mathcal{H} = \mathcal{H} = \mathcal{H}'$ mit $\mathcal{H} := L^2[0, 1]$ gilt.

Beweis. (a) siehe [7], (1.62); (b) siehe [24], Theorem 7.3.6, 1. □

Für zentrierte $L^2_{\mathcal{H}}$ -wertige Zufallsvariablen X und Y gilt dabei gemäß [7], S.39

$$X \perp\!\!\!\perp Y \implies X \perp\!\!\!\perp Y \implies \mathbb{E}\langle X, Y \rangle_{\mathcal{H}} = 0, \quad (2.33)$$

wobei $X \perp\!\!\!\perp Y$ für stochastische Unabhängigkeit der Zufallsvariablen X und Y steht und $X \perp\!\!\!\perp Y$ für $\mathcal{C}_{X,Y} = 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}$ steht.

Abschnitt 2.4.2 schließen wir mit einer Visualisierung des Erwartungswertes einer Banach-Raum-wertigen Zufallsvariablen.

Beispiel 2.30. Es sei $(\{1, 2, 3\}, \text{Pot}(\{1, 2, 3\}), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und es gelte $\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{2}{7}, \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{7}, \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{4}{7}$. Ferner seien $b_1, b_2, b_3 \in \mathcal{C}[0, 1]$ mit $b_1(t) := 4 \sin(4\pi t)$, $b_2(t) := 3 \cos(\pi t)$, $b_3(t) := -\cos(5\pi t)$ für alle $t \in [0, 1]$ und $X: \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ sei eine Zufallsvariable mit $X(\omega) := \sum_{i=1}^3 \mathbf{1}_{\{i\}}(\omega) b_i$ für alle $\omega \in \{1, 2, 3\}$. Dann gilt

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2}{7}b_1 + \frac{1}{7}b_2 + \frac{4}{7}b_3.$$

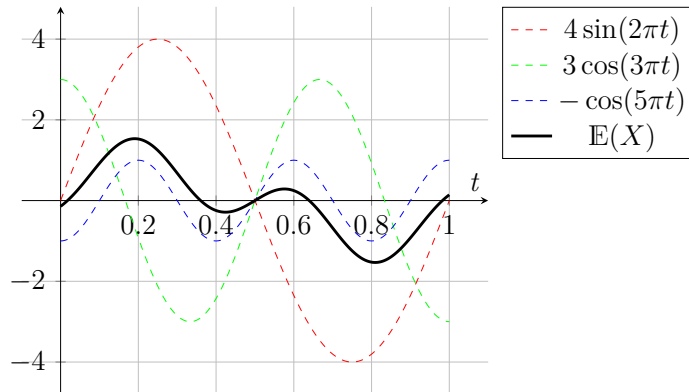


Abbildung 2.1: Erwartungswert der $\mathcal{C}[0, 1]$ -wertigen Zufallsvariable X . ◆

2.5 Funktionale Zeitreihen

Hier beschäftigen wir uns mit *funktionalen Zeitreihen*, worunter wir Folgen von Zufallsvariablen $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ verstehen, deren Folgenglieder funktionale Zufallsvariablen sind. Bei den Definitionen, Schreibweisen und Resultaten halten wir uns im Wesentlichen an [7] sowie an Horváth und Kokoszka [21]. Nachfolgend sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ sei ein separabler Banach-Raum versehen mit der Borel'schen σ -Algebra $\mathbb{B}(\mathcal{B})$, $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ sei ein separabler Hilbert-Raum versehen mit der Borel'schen σ -Algebra $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ und alle genannten Zufallsvariablen sind bzgl. \mathfrak{A} messbar. Ferner bezeichnen wir eine \mathcal{B} -wertige Zeitreihe $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ als bzgl. einer \mathcal{B} -wertigen Zeitreihe $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ *kausal*, wenn es eine messbare Funktion $f: \mathcal{B}^\infty \rightarrow \mathcal{B}$ mit

$$X_k = f(\varepsilon_k, \varepsilon_{k-1}, \dots) \tag{2.34}$$

f.s. für alle $k \in \mathbb{Z}$ gibt, wobei \mathcal{B}^∞ mit der Produkt- σ -Algebra $\mathfrak{B}^\infty := \mathbb{B}(\mathcal{B}) \otimes \mathbb{B}(\mathcal{B}) \otimes \dots$ versehen sei. Handelt es sich bei $(\varepsilon_k)_k$ zudem um eine stationäre Zeitreihe (siehe Definition 2.31 (a)), so ist auch $(X_k)_k$ mit (2.34) gemäß Stout [39], Theorem 3.5.3, eine stationäre Zeitreihe. Ferner heißt $(X_k)_k$ $L^p_{\mathcal{B}}$ -Zeitreihe für ein $p \geq 1$, wenn $X_k \in L^p_{\mathcal{B}}$ für alle k gilt und *zentriert*, wenn $(X_k)_k$ eine $L^1_{\mathcal{B}}$ -Zeitreihe mit $\mathbb{E}(X_k) = 0_{\mathcal{B}}$ für alle k ist.

2.5.1 Stationarität

Für funktionale Zeitreihen definieren wir nachfolgend (*starke*) *Stationarität*, *schwache Stationarität*, ein funktionales Pendant zur *Autokorrelationsfunktion* und *weißes Rauschen*.

Definition 2.31 (Stationarität).

- (a) Eine \mathcal{B} -wertige Zeitreihe $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ heißt (stark) *stationär*, falls für alle $k_1, \dots, k_n, h \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(X_{k_1+h}, \dots, X_{k_n+h}) \stackrel{d}{=} (X_{k_1}, \dots, X_{k_n}).$$

- (b) Eine $L^2_{\mathcal{H}}$ -Zeitreihe $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ heißt *schwach stationär*, falls sowohl $\mathbb{E}(X_k) = h$ für ein $h \in \mathcal{H}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ als auch $\mathcal{C}_{X_k, X_l} = \mathcal{C}_{X_0, X_{l-k}}$ für alle $k, l \in \mathbb{Z}$ gilt. \blacklozenge

Definition 2.32 (Autokovarianzoperatoren). Es sei $\mathbf{X} := (X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine schwach stationäre $L^2_{\mathcal{H}}$ -Zeitreihe. Dann bezeichnen wir die Operatoren

$$\mathcal{C}_h = \mathcal{C}_{h; \mathbf{X}} := \mathcal{C}_{X_0, X_h} \quad (2.35)$$

für alle $h \in \mathbb{Z}$ als *Autokovarianzoperatoren* von \mathbf{X} . \blacklozenge

Eine Zeitreihe aus *Innovationen* ist häufig *weißes Rauschen* (für konkrete Beispiele für *weißes Rauschen* siehe [7], S.72), wobei wir unter einer *Innovation* eine von Zufallsvariable versteht, die eine gewisse Störung beschreibt.

Definition 2.33 (weißes Rauschen). Eine \mathcal{H} -wertige Zeitreihe $\varepsilon := (\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ heißt ...

- (a) *schwaches weißes Rauschen*, falls ε eine zentrierte, schwach stationäre $L^2_{\mathcal{H}}$ -Zeitreihe mit $\sigma^2 = \mathbb{E}||\varepsilon_k||_{\mathcal{H}}^2$ für ein $\sigma > 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $\mathcal{C}_{h; \varepsilon} = 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}$ für alle $h \neq 0$ ist;
- (b) *halb-starkes weißes Rauschen*, falls ε ein stationäres, weißes Rauschen ist;
- (c) *starkes weißes Rauschen*, falls ε ein u.i.v., schwaches weißes Rauschen ist. \blacklozenge

Bemerkung 2.34. Soweit bekannt, ist in der Literatur zu funktionalen Zeitreihen nur von schwachem sowie von starkem weißen Rauschen die Rede (siehe [7] und [22]). Ferner wird in diversen Quellen zwar starkes weißen Rauschen vorausgesetzt, jedoch meist nur von Stationarität Gebrauch gemacht (siehe bspw. [7], Theorem 7.1). \blacklozenge

2.5.2 Lineare Prozesse und Invertierbarkeit

In Anlehnung an [7] geben wir die Definition und die Eigenschaften *linearer Prozesse*, die Definition von *Invertierbarkeit linearer Prozesse* und eine hinreichende Bedingung für Invertierbarkeit zentrierter, *linearer Prozesse* in Hilbert-Räumen an. Diese Begriffe werden vor allem bei der Schätzung der Operatoren im FGARCH-Modell in Kapitel 4 benötigt.

Definition und Eigenschaften 2.35 (linearer Prozess und Invertierbarkeit). Es sei $h \in \mathcal{H}$, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ sei eine Folge beschränkter Operatoren mit $\sum_{n=1}^{\infty} ||A_n||_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} < \infty$ und $\varepsilon := (\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sei ein schwaches weißes Rauschen. Dann bezeichnen wir eine Folge von \mathcal{H} -wertigen Zufallsvariablen $\mathbf{X} := (X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ als *linearen Prozess* bzgl. ε , wenn

$$X_k = h + \varepsilon_k + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\varepsilon_{k-n}) \quad (2.36)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ f.s. gilt, wobei die Reihe in (2.36) nach [7], Lemma 7.1 f.s. und in $L^2_{\mathcal{H}}$ konvergiert. Ferner wird ein linearer Prozess \mathbf{X} bzgl. ε als *invertierbar* bezeichnet, wenn

$$X_k = h + \varepsilon_k + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(X_{k-n} - h) \quad (2.37)$$

mit einer weiteren Folge beschränkter Operatoren $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ für alle k f.s. gilt.

Ein linearer Prozess \mathbf{X} mit (2.36) ist eine schwach stationäre $L^2_{\mathcal{H}}$ -Zeitreihe mit $\mathbb{E}(X_k) = h$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und sogar stationär, falls ε ein halb-starkes weißes Rauschen ist.

Beweis. Siehe [7], S.182 – 184. □

Satz 2.36. *Es sei $\mathbf{X} := (X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ein \mathcal{H} -wertiger zentrierter, linearer Prozess bzgl. eines halb-starken weißen Rauschens $\varepsilon := (\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit der Gestalt (2.36). Des Weiteren erfülle \mathbf{X} die Voraussetzungen in [7], Lemma 7.2 und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$ gelte*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \|A_n\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} \neq 1.$$

Dann ist \mathbf{X} invertierbar, d.h. für alle k gilt

$$X_k = \varepsilon_k + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(X_{k-n}) \quad (2.38)$$

f.s., wobei $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ eine Folge von beschränkten Operatoren mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|\rho_n\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} < \infty$ sei und die in (2.38) angegebene Reihe sowohl f.s. als auch in $L^2_{\mathcal{H}}$ konvergiert.

Beweis. Siehe [7], Theorem 7.1; im Nachweis wird zwar gefordert, dass die Innovationen starkes weißes Rauschen sind, aber es geht keine stochastische Unabhängigkeit ein. □

2.5.3 L^p - m -Approximierbarkeit

Zeitreihen $\mathbf{X} := (X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sind oft weder stochastisch unabhängig noch m -abhängig für ein $m \in \mathbb{N}$, d.h. $\mathfrak{A}_{\leq k} := \sigma(\dots, X_{k-1}, X_k)$ und $\mathfrak{A}_{\geq k+m} := \sigma(X_{k+m}, X_{k+m+1}, \dots)$ sind stochastisch unabhängig für alle k . Falls \mathbf{X} jedoch bzgl. einer u.i.v. Zeitreihe kausal ist, besteht zumindest noch die Möglichkeit, \mathbf{X} auf die folgende Weise durch m -abhängige Zeitreihen für $m \rightarrow \infty$ zu approximieren.

Definition 2.37 (L^p - m -Approximierbarkeit). Es sei $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine $L^p_{\mathcal{B}}$ -Zeitreihe für ein $p \geq 1$, die bzgl. einer u.i.v. \mathcal{B} -wertigen Zeitreihe $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ kausal ist, d.h. es gibt eine messbare Funktion $f: \mathcal{B}^{\infty} \rightarrow \mathcal{B}$ mit $X_k = f(\varepsilon_k, \varepsilon_{k-1}, \dots)$ f.s. für alle k . Ferner seien $(\varepsilon_k^{(m)})_{k \in \mathbb{Z}}$ u.i.v., \mathcal{B} -wertige Zeitreihen für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon_k^{(m)} \stackrel{d}{=} \varepsilon_0$ für alle k, m , wobei $(\varepsilon_k)_k, (\varepsilon_k^{(1)})_k, (\varepsilon_k^{(2)})_k, \dots$ stochastisch unabhängig voneinander seien und für alle k, m gilt

$$X_{k,m} := f(\varepsilon_k, \varepsilon_{k-1}, \dots, \varepsilon_{k-m+1}, \varepsilon_{k-m}^{(m)}, \varepsilon_{k-m-1}^{(m)}, \dots). \quad (2.39)$$

Dann bezeichnen wir die Zeitreihe $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ als $L^p_{\mathcal{B}}-m$ -approximierbar, falls

$$\sum_{m=1}^{\infty} \nu_{p,\mathcal{B}}(X_m - X_{m,m}) < \infty \quad (2.40)$$

mit $\nu_{p,\mathcal{B}}(\cdot) := (\mathbb{E} \|\cdot\|_{\mathcal{B}}^p)^{1/p}$ gilt und als *geometrisch* $L^p_{\mathcal{B}}-m$ -approximierbar, falls

$$\nu_{p,\mathcal{B}}(X_m - X_{m,m}) = O(\rho^m). \quad (2.41)$$

für ein $\rho \in (0, 1)$ mit $m \rightarrow \infty$ gilt. \blacklozenge

Bemerkung 2.38. L^p - m -Approximierbarkeit wurde von Hörmann und Kokoszka in [23] eingeführt. Dort sind Beispiele und hinreichende Bedingungen für L^p - m -approximierbare Zeitreihen zu finden und es wird beschrieben, dass kein direkter Zusammenhang zwischen L^p - m -Approximierbarkeit und α -mischend besteht (eine Zeitreihe $\mathbf{X} = (X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ wird als α -mischend bezeichnet, wenn $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \alpha_m$ für alle $A \in \mathfrak{A}_{\leq k}, B \in \mathfrak{A}_{\geq k+m}$ sowie $k, m \in \mathbb{N}$ und $\alpha_m \rightarrow 0$ gilt). \blacklozenge

Im Folgenden geben wir Rechenregeln für L^p - m -Approximierbarkeit an.

Eigenschaften 2.39. Es sei $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$, es sei $b \in \mathcal{B}$ und $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sowie $(Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ seien $L^p_{\mathcal{B}}-m$ -approximierbare Zeitreihen für ein $p \in [1, \infty)$. Dann gilt:

- (a) $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ist $L^q_{\mathcal{B}}-m$ -approximierbar für jedes $q \in [1, p]$.
- (b) $(X_k + Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ist $L^p_{\mathcal{B}}-m$ -approximierbar.
- (c) $(A(X_k) + b)_{k \in \mathbb{Z}}$ ist $L^p_{\mathcal{B}}-m$ -approximierbar.

Beweis. (a) folgt aus Jensen'scher Ungleichung; für (b) und (c) siehe [23], Lemma 2.1. \square

2.5.4 Ergodizität stationärer Zeitreihen

Auch wenn keine stochastische Unabhängigkeit, aber *Ergodizität* einer stationären Zeitreihe vorliegt, können starke Gesetze der großen Zahlen formuliert werden – sogenannte *Ergodensätze*.

Definition 2.40 (Ergodizität stationärer Zeitreihe). Im Folgenden sei $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine \mathcal{B} -wertige, stationäre Zeitreihe. Dann wird ein Ereignis $A \in \sigma(\dots, X_{-1}, X_0, X_1, \dots)$, d.h. es gibt ein $B \in \mathcal{B}^{\infty}$ mit $A = \{(\dots, X_{-1}, X_0, X_1, \dots) \in B\}$, als *invariant*, wenn $A = \{(X_k, X_{k+1}, \dots) \in B\}$ für alle k gelte und $(X_k)_k$ als *ergodisch* bezeichnet, wenn alle invarianten Ereignisse entweder die Wahrscheinlichkeit 0 oder 1 besitzen. \blacklozenge

Dabei ist sowohl jede u.i.v., \mathcal{B} -wertige Zeitreihe $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ gemäß [39], Lemma 3.5.8, als auch jede bzgl. einer stationären \mathcal{B} -wertigen Zeitreihe $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ kausale Zeitreihe $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ nach [39], Theorem 3.5.8, stationär und ergodisch.

Abschließend geben wir einen *Ergodensatz* für stationäre Zeitreihen im Sinne von Konvergenz f.s. an (für eine Version im Sinne der L^1 -Konvergenz siehe [39], Korollar 3.5.2).

Satz 2.41 (Ergodensatz). Für eine stationäre, ergodische L^1_B -Zeitreihe $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\mathbb{P}\text{-f.s.}} \mathbb{E}(X_1).$$

Beweis. Siehe [39], Theorem 3.5.7. □

2.5.5 FAR-, FMA- und FARMA-Zeitreihen

Im Folgenden geben wir eine formale Definition und Eigenschaften von AR -, MA - sowie $ARMA$ -Zeitreihen in beliebigen Hilbert-Räumen an (für AR -Zeitreihen in beliebigen Banach-Räumen siehe [7], Kapitel 6). Diese Zeitreihen werden uns bei der Schätzung der Operatoren im $FARCH$ - bzw. im $FGARCH$ -Modell begegnen (siehe hierzu auch Unterabschnitt 4.1.2).

Definition 2.42 (FAR-, FMA- und FARMA-Zeitreihe). Eine \mathcal{H} -wertige Zeitreihe $\mathbf{X} := (X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ bezeichnen wir als ...

- (a) *funktionale autoregressive* Zeitreihe der Ordnung p , kurz $FAR(p)$ -Zeitreihe, wenn \mathbf{X} stationär ist und es ein $p \in \mathbb{N}$, ein $h \in \mathcal{H}$, ein schwaches weißes Rauschen $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sowie Operatoren $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ mit $A_p \neq 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}$ gibt, sodass für alle k f.s. gilt:

$$X_k = h + \varepsilon_k + \sum_{i=1}^p A_i(X_{k-i});$$

- (b) *funktionales moving-average* der Ordnung q , kurz $FMA(q)$ -Zeitreihe, wenn \mathbf{X} stationär ist und es ein $q \in \mathbb{N}$, ein $h \in \mathcal{H}$, ein schwaches weißes Rauschen $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sowie Operatoren $M_1, \dots, M_q \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ mit $M_q \neq 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}$ gibt, sodass für alle k f.s. gilt:

$$X_k = h + \varepsilon_k + \sum_{j=1}^q M_j(\varepsilon_{k-j});$$

- (c) *funktionalen autoregressiven moving-average* der Ordnungen p und q , bzw. kurz $FARMA(p, q)$ -Zeitreihe, wenn \mathbf{X} stationär und es ein $p \in \mathbb{N}$, ein $q \in \mathbb{N}$, ein $h \in \mathcal{H}$, ein schwaches weißes Rauschen $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sowie Operatoren $A_1, \dots, A_p, M_1, \dots, M_q \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ mit $A_p \neq 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} \neq M_q$ gibt, sodass für alle k f.s. gilt:

$$X_k = h + \varepsilon_k + \sum_{i=1}^p A_i(X_{k-i}) + \sum_{j=1}^q M_j(\varepsilon_{k-j}). \quad \blacklozenge$$

Bemerkung 2.43. Aufgrund der Resultate in Kapitel 3 und Abschnitt 4.1.2 ist ein Erwähnen allgemeiner Existenzaussagen und Eigenschaften von FAR-, FMA- sowie FARMA-Zeitreihen in dieser Arbeit nicht notwendig; sie können [7] für FAR-Zeitreihen, Klepsch und Klüppelberg [29] für FMA-Zeitreihen und Spangenberg [38] sowie Klepsch, Klüppelberg und Wei [28] für FARMA-Zeitreihen entnommen werden. ◆

3 Das FARCH-Modell und das FGARCH-Modell

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit funktionalen Versionen von ARCH- und GARCH-Zeitreihen mit Werten in bestimmten Funktionenräumen und beliebigen Ordnungen. Wir werden in Abschnitt 3.1 zunächst die formale Definition solcher ARCH- und GARCH-Zeitreihen angeben, in Abschnitt 3.2 hinreichende Bedingungen für die Existenz stationärer Lösungen und in Abschnitt 3.3 hinreichende Bedingungen für die Existenz gewisser Momente und für die L^p - m -Approximierbarkeit dieser Zeitreihen formulieren.

Hörmann, Horváth und Reeder definierten bereits in [22] aus dem Jahr 2013 eine Version des ARCH(1)-Modells für Zeitreihen mit Werten in $C[0, 1]$ und $L^2[0, 1]$ und stellten hinreichende Bedingungen für die Existenz stationärer Lösungen dieser Zeitreihen auf. Ferner definierten Aue, Horváth, und Pellatt in [4] im Jahr 2017, GARCH(1, 1)-Zeitreihen mit Werten in $C[0, 1]$ sowie $L^2[0, 1]$ und formulierten hinreichende Bedingungen für die Existenz stationärer Lösungen derartiger Zeitreihen. Außerdem formulierten Cerovecki, Francq, Hörmann und Zakoïan in [11] aus dem Jahr 2019, sowohl eine Definition $L^2[0, 1]$ -wertiger GARCH-Zeitreihen mit beliebigen Ordnungen, als auch hinreichende Bedingungen für die Existenz stationärer Lösungen dieser Zeitreihen.

In der vorliegenden Arbeit definieren wir ARCH- und GARCH-Zeitreihen mit Indexmenge \mathbb{Z} , deren Glieder Werte in separablen Banach-Räumen F von Funktionen mit Definitionsbereich $[0, 1]$ annehmen. Da für konkrete Resultate auch Funktionenräume F benötigt werden, gehen wir im gesamten Kapitel davon aus, dass F Element von

$$\mathcal{F} := \mathcal{F}_{[1, \infty)} \cup \mathcal{F}_\infty \quad (3.1)$$

sei, wobei $\mathcal{F}_{[1, \infty)}$ für die Menge der $L^p[0, 1]$ -Räume mit $p \in [1, \infty)$ steht und \mathcal{F}_∞ die Menge aller bzgl. \odot abgeschlossenen, separablen Banach-Räume, versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ist. Für die Modellierung gehen wir in diesem Kapitel wieder vom Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ sowie von der Tatsache aus, dass alle genannten Zufallsvariablen bzgl. \mathfrak{A} messbar sind. Ferner werden wir auf einem kartesischen Produkt F^n mit $n \in \mathbb{N}$ stets die Norm $\|\cdot\|_{F^n}$ mit $\|\mathbf{x}\|_{F^n}^2 := \sum_{i=1}^n \|x_i\|_F^2$ für alle $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)^T \in F^n$ verwenden. Um die Wohldefiniertheit diverser Ausdrücke in diesem Kapitel zu gewährleisten, benötigen wir für $F \in \mathcal{F}$ zudem die Teilmengen $F_{\geq 0} := \{f \in F \mid f(t) \geq 0 \text{ für } \lambda\text{-f.a. } t\}$ sowie $F_{> 0} := \{f \in F \mid f(t) > 0 \text{ für } \lambda\text{-f.a. } t\}$, die Unterräume

$$\dot{F} := \begin{cases} L^{2p}, & F = L^p \text{ für ein } p \in [1, \infty), \\ F, & F \in \mathcal{F}_\infty, \end{cases} \quad (3.2)$$

und Operatoren $A \in \mathcal{L}_{F, \dot{F}}$ (siehe Definition der ersten Zeile von $\Psi_k^{(p, q^*)}$ aus (3.5)).

3.1 Definition und Darstellung

Wir beginnen mit der formalen Definition funktionaler ARCH- und GARCH-Zeitreihen.

Definition 3.1 (FARCH- und FGARCH-Zeitreihe). Es sei $F \in \mathcal{F}$, es sei $\delta \in F_{>0}$, $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sei eine u.i.v. F -wertige Zeitreihe und $\alpha_i, \beta_j \in \mathcal{L}_F$ seien Operatoren mit $\alpha_i, \beta_j: F_{\geq 0} \rightarrow F_{\geq 0}$ für alle $i \in \mathbb{N}_{\leq p}, j \in \mathbb{N}_{\leq q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$. Dann bezeichnen wir eine F -wertige Zeitreihe $(\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ als $FARCH(p)$ -Zeitreihe, falls $\alpha_p \neq 0_{\mathcal{L}_F}$ sowie

$$\mathcal{X}_k = \varepsilon_k \odot \sigma_k, \quad \sigma_k^2 = \delta + \sum_{i=1}^p \alpha_i(\mathcal{X}_{k-i}^2) \quad (3.3)$$

f.s. für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt und wir bezeichnen eine F -wertige Zeitreihe $(\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ als $FGARCH(p, q)$ -Zeitreihe, falls $\alpha_p \neq 0_{\mathcal{L}_F} \neq \beta_q$ sowie für alle $k \in \mathbb{Z}$ f.s. gilt:

$$\mathcal{X}_k = \varepsilon_k \odot \sigma_k, \quad \sigma_k^2 = \delta + \sum_{i=1}^p \alpha_i(\mathcal{X}_{k-i}^2) + \sum_{j=1}^q \beta_j(\sigma_{k-j}^2). \quad (3.4)$$

Bemerkung 3.2. Für FARCH- bzw. FGARCH-Zeitreihen mit beliebigen Ordnungen schreiben wir in der gesamten Arbeit $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Ferner stehe $p \in \mathbb{N}$ stets für die Ordnung von FARCH- und $p, q \in \mathbb{N}$ sowie $q^* \in \mathbb{N}^*$ stehen stets für die Ordnungen von FGARCH-Zeitreihen, wobei wir $FGARCH(p, 0)$ - als $FARCH(p)$ -Zeitreihen identifizieren und $\alpha_i = 0_{\mathcal{L}_F} = \beta_j$ für $i \in \mathbb{N}_{>p}, j \in \{0\} \cup \mathbb{N}_{>q}$ gilt. \blacklozenge

Für Nachweise hinsichtlich der Existenz stationärer Lösungen benötigen wir die folgende *Markov-Darstellung* F -wertiger $FGARCH(p, q^*)$ -Zeitreihen $(\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ für alle k :

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_k^{(p, q^*)} &= \delta_k^{(p, q^*)} + \Psi_k^{(p, q^*)}(\mathfrak{s}_{k-1}^{(p, q^*)}) \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{X}_k^2 \\ \mathcal{X}_{k-1}^2 \\ \vdots \\ \mathcal{X}_{k-p+2}^2 \\ \mathcal{X}_{k-p+1}^2 \\ \sigma_k^2 \\ \sigma_{k-1}^2 \\ \vdots \\ \sigma_{k-q^*+2}^2 \\ \sigma_{k-q^*+1}^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \delta \odot \varepsilon_k^2 \\ 0_F \\ \vdots \\ 0_F \\ 0_F \\ \delta \\ 0_F \\ \vdots \\ 0_F \\ 0_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boxdot_k \alpha_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \boxdot_k \alpha_p & \boxdot_k \beta_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \boxdot_k \beta_{q^*} \\ \mathbb{I}_F & 0_{\mathcal{L}_F} & \cdots & \cdots & 0_{\mathcal{L}_F} & 0_{\mathcal{L}_F} & 0_{\mathcal{L}_F} & \cdots & \cdots & 0_{\mathcal{L}_F} \\ 0_{\mathcal{L}_F} & \mathbb{I}_F & 0_{\mathcal{L}_F} & \cdots & 0_{\mathcal{L}_F} & 0_{\mathcal{L}_F} & \ddots & \ddots & \cdots & 0_{\mathcal{L}_F} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathcal{L}_F} & \cdots & 0_{\mathcal{L}_F} & \mathbb{I}_F & 0_{\mathcal{L}_F} & 0_{\mathcal{L}_F} & \cdots & 0_{\mathcal{L}_F} & 0_{\mathcal{L}_F} & 0_{\mathcal{L}_F} \\ \alpha_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_p & \beta_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \beta_{q^*} \\ 0_{\mathcal{L}_F} & 0_{\mathcal{L}_F} & \cdots & \cdots & 0_{\mathcal{L}_F} & \mathbb{I}_F & 0_{\mathcal{L}_F} & \cdots & \cdots & 0_{\mathcal{L}_F} \\ 0_{\mathcal{L}_F} & \ddots & \ddots & \cdots & 0_{\mathcal{L}_F} & 0_{\mathcal{L}_F} & \mathbb{I}_F & 0_{\mathcal{L}_F} & \cdots & 0_{\mathcal{L}_F} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathcal{L}_F} & \cdots & 0_{\mathcal{L}_F} & 0_{\mathcal{L}_F} & 0_{\mathcal{L}_F} & 0_{\mathcal{L}_F} & \cdots & 0_{\mathcal{L}_F} & \mathbb{I}_F & 0_{\mathcal{L}_F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{X}_{k-1}^2 \\ \mathcal{X}_{k-2}^2 \\ \vdots \\ \mathcal{X}_{k-p+1}^2 \\ \mathcal{X}_{k-p}^2 \\ \sigma_{k-1}^2 \\ \sigma_{k-2}^2 \\ \vdots \\ \sigma_{k-q^*+1}^2 \\ \sigma_{k-q^*}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dabei gilt $\boxdot_k: F \rightarrow F, f \mapsto f \odot \varepsilon_k^2$ für alle k . Gelte für $F \in \mathcal{F}$ außerdem

$$\mathbb{E} \ln^+ \|\varepsilon_0^2\|_{\dot{F}} < \infty \quad (3.6)$$

mit $\ln^+(x) := \ln(\max(1, x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so gilt für alle k zunächst $\|\varepsilon_k^2\|_{\dot{F}} < \infty$ f.s., womit \boxdot_k per Definition f.s. beschränkte Operatoren von \dot{F} nach F mit

$$\|\boxdot_k\|_{\mathcal{L}_{\dot{F}, F}} \leq \|\varepsilon_k^2\|_{\dot{F}} \quad (3.7)$$

f.s. sind. Mit $\mathfrak{s}^* := \mathfrak{p} + \mathfrak{q}^*$ gilt dann $\Psi_k^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \in \mathcal{L}_F^{\mathfrak{s}^* \times \mathfrak{s}^*}$ f.s. sowie $\Psi_k^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \in \mathcal{L}_{F^{\mathfrak{s}^*}}$ f.s. und wegen $\mathcal{X}_k^2 = \sigma_k^2 \odot \varepsilon_k^2$ f.s. gilt $\mathfrak{s}_k^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \in F^{\mathfrak{s}^*}$ f.s. sowie $\delta_k^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \in F^{\mathfrak{s}^*}$ f.s., falls f.s. $\delta, \varepsilon_k^2, \sigma_{k-\mathfrak{q}^*}^2, \dots, \sigma_k^2 \in \dot{F}$ gilt. Ferner folgt aus (2.27), $\|\mathbb{I}_F\|_{\mathcal{L}_F} = 1$, (3.7) und $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_F} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{F, \dot{F}}}$:

$$\begin{aligned} \|\Psi_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{\mathcal{L}_{F^{\mathfrak{s}^*}}}^2 &< \mathfrak{s}^* + \sum_{i=1}^{\mathfrak{p}} \|\Box_0 \alpha_i\|_{\mathcal{L}_F}^2 + \|\alpha_i\|_{\mathcal{L}_F}^2 + \sum_{j=1}^{\mathfrak{q}^*} \|\Box_0 \beta_j\|_{\mathcal{L}_F}^2 + \|\beta_j\|_{\mathcal{L}_F}^2 \\ &\leq \mathfrak{s}^* + (1 + \|\varepsilon_0^2\|_{\dot{F}}^2) \left(\sum_{i=1}^{\mathfrak{p}} \|\alpha_i\|_{\mathcal{L}_{F, \dot{F}}}^2 + \sum_{j=1}^{\mathfrak{q}^*} \|\beta_j\|_{\mathcal{L}_{F, \dot{F}}}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

woraus im Fall (3.6) wegen $2 \ln^+ \|\Psi_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{\mathcal{L}_{F^{\mathfrak{s}^*}}} = \ln^+ \|\Psi_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{\mathcal{L}_{F^{\mathfrak{s}^*}}}^2$ wiederum folgt:

$$\mathbb{E} \ln^+ \|\Psi_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{\mathcal{L}_{F^{\mathfrak{s}^*}}} < \infty. \quad (3.9)$$

3.2 Stationäre Lösungen

In diesem Abschnitt geben wir hinreichende Bedingungen für die Existenz stationärer FARCH- und FGARCH-Zeitreihen mit Werten in $F \in \mathcal{F}$ an. Hierzu benötigen wir den *Lyapunov-Exponenten* der u.i.v. und somit stationären Zeitreihe $(\Psi_k^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)})_{k \in \mathbb{Z}}$ mit $\Psi_k^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}$ aus (3.5) für alle k , welcher unter der Voraussetzung (3.9) definiert sei durch

$$\gamma^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \mathbb{E} \ln \left\| \Psi_k^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \Psi_{k-1}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \dots \Psi_1^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \right\|_{\mathcal{L}_{F^{\mathfrak{s}^*}}}, \quad (3.10)$$

wobei $\gamma^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}$ nach [26], Theorem 6 wohldefiniert ist mit $\gamma^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \in [-\infty, \infty)$ und

$$\gamma^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \left\| \Psi_k^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \Psi_{k-1}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \dots \Psi_1^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \right\|_{\mathcal{L}_{F^{\mathfrak{s}^*}}} \text{ f.s.} \quad (3.11)$$

Satz 3.3. *Nachfolgend sei $F \in \mathcal{F}$, es sei $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ u.i.v. Zeitreihe mit (3.6), es gelte $\delta \in \dot{F}_{>0}$ und für $i = 1, \dots, \mathfrak{p}, j = 0, \dots, \mathfrak{q}^*$ mit $\mathfrak{p} \in \mathbb{N}, \mathfrak{q}^* \in \mathbb{N}^*$ gelte $\alpha_i, \beta_j \in \mathcal{L}_{F, \dot{F}}$ mit $\alpha_i, \beta_j: F_{\geq 0} \rightarrow F_{\geq 0}, \beta_0 := 0_{\mathcal{L}_F}, \alpha_{\mathfrak{p}} \neq 0_{\mathcal{L}_F}$ sowie $\beta_{\mathfrak{q}^*} \neq 0_{\mathcal{L}_F}$ im Fall $\mathfrak{q}^* \in \mathbb{N}$.*

(a) *Es gibt eine stationäre Lösung $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ der FGARCH($\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*$)-Gleichungen (3.3) bzw. (3.4), falls für den Lyapunov-Exponenten aus (3.10) gilt:*

$$\gamma^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} < 0. \quad (3.12)$$

Dabei sind $(\mathcal{X}_k)_k$ und $(\sigma_k)_k$ f.s. eindeutig und bzgl. der u.i.v. Zeitreihe $(\varepsilon_k)_k$ kausal und somit stationär sowie ergodisch. Ferner ist σ_k stochastisch unabhängig von ε_k für alle k mit der Eigenschaft $\sigma_k^2(t) \geq \delta(t) > 0$ f.s. für λ -f.a. $t \in [0, 1]$.

(b) *Falls für ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $\nu > 0$*

$$\psi_{n, \nu}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} := \mathbb{E} \left\| \Psi_n^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \Psi_{n-1}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \dots \Psi_1^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \right\|_{\mathcal{L}_{F^{\mathfrak{s}^*}}}^\nu < 1 \quad (3.13)$$

gilt, ist insbesondere (3.12) erfüllt.

Beweis.

(a) Aus der Markov-Darstellung (3.5) folgt

$$\varsigma_k^{(p,q^*)} = \delta_k^{(p,q^*)} + \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_k^{(p,q^*)} \Psi_{k-1}^{(p,q^*)} \dots \Psi_{k-m+1}^{(p,q^*)} (\delta_{k-m}^{(p,q^*)}) \quad (3.14)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ f.s., falls die Reihe f.s. konvergiert. (3.11) impliziert

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \ln \left\| \Psi_k^{(p,q^*)} \Psi_{k-1}^{(p,q^*)} \dots \Psi_{k-m+1}^{(p,q^*)} (\delta_{k-m}^{(p,q^*)}) \right\|_{F^{s*}} \leq \gamma^{(p,q^*)} + \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \ln \|\delta_{k-m}^{(p,q^*)}\|_{F^{s*}}$$

und per Definition von $\delta_{k-m}^{(p,q^*)}$ für alle k, m sowie wegen $0 < \|\delta\|_F \leq \|\delta\|_{\dot{F}} < \infty$ gilt

$$\|\delta_{k-m}^{(p,q^*)}\|_{F^{s*}}^2 = \|\delta \odot \varepsilon_{k-m}^2\|_F^2 + \|\delta\|_F^2 \leq \|\delta\|_{\dot{F}}^2 (1 + \|\varepsilon_{k-m}^2\|_F^2). \quad (3.15)$$

Wegen (3.6) gilt dann $\mathbb{E} \ln^+ \|\delta_{k-m}^{(p,q^*)}\|_{F^{s*}} < \infty$ und wegen $\gamma^{(p,q^*)} < 0$ gilt folglich

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \left\| \Psi_k^{(p,q^*)} \Psi_{k-1}^{(p,q^*)} \dots \Psi_{k-m+1}^{(p,q^*)} (\delta_{k-m}^{(p,q^*)}) \right\|_{F^{s*}}^{1/m} = e^{\gamma^{(p,q^*)}} < 1$$

f.s., womit die Reihe in (3.14) gemäß des Wurzelkriteriums f.s. konvergiert. Damit existiert eine Lösung $(\varsigma_k^{(p,q^*)})_k$ der Gleichung (3.5) und demzufolge existiert auch eine Lösung der FARCH(\mathbf{p})-Gleichungen (3.3) und der FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)-Gleichungen (3.4), wobei $(\sigma_k)_k$ sowie $(\mathcal{X}_k)_k$ bzgl. der u.i.v. Zeitreihe $(\varepsilon_k)_k$ kausal und somit stationär sowie ergodisch sind. Ferner ist σ_k stochastisch unabhängig von ε_k für alle k und wegen $\alpha_i, \beta_j: F_{\geq 0} \rightarrow F_{\geq 0}$ für alle i, j und $\delta \in \dot{F}_{>0}$ gilt $\sigma_k^2(t) \geq \delta(t) > 0$ für alle k und λ -f.a. $t \in [0, 1]$. Schließlich kann der Nachweis der Eindeutigkeit [11], S.26, entnommen werden.

(b) Aus (3.13) für ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $\nu > 0$ folgt per Definition von $\gamma^{(p,q^*)}$, wegen Submultiplikativität der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{F^{s*}}}$ sowie der Jensen'schen Ungleichung:

$$\begin{aligned} \gamma^{(p,q^*)} &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{mn} \mathbb{E} \ln \left(\prod_{l=1}^m \left\| \Psi_{ln}^{(p,q^*)} \Psi_{ln-1}^{(p,q^*)} \dots \Psi_{(l-1)n+1}^{(p,q^*)} \right\|_{\mathcal{L}_{F^{s*}}} \right) \\ &\leq \frac{1}{n\nu} \ln(\psi_{n,\nu}^{(p,q^*)}) < 0. \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung 3.4.

- (a) Die Angabe einer notwendigen Bedingung für die Existenz stationärer FARCH- und FGARCH-Zeitreihen gestaltet sich schwierig (siehe [11], Bemerkung 1).
- (b) Satz 3.3 ist eine Verallgemeinerung unter einer schwächeren Bedingung der Theoreme 2.1 und 2.3 in [22], der Theoreme 2.1 und 2.2 in [3] sowie von Theorem 1 in [11]. In den Theoremen 2.1 bzw. 2.3 in [22] wurde nämlich eine Aussage hinsichtlich der Existenz stationärer FARCH(1)- Zeitreihen für die Räume $L^2[0, 1]$ bzw. $C[0, 1]$ formuliert, wobei in beiden Theoremen von einem Integraloperator ausgegangen und $\mathbb{E} \|\Psi_1^{(1,0)}\|_{\mathcal{L}_{L^2[0,1]}}^\nu < 1$ bzw. $\mathbb{E} \|\Psi_1^{(1,0)}\|_{\mathcal{L}_{C[0,1]}}^\nu < 1$ für ein $\nu > 0$ statt (3.12) vorausgesetzt wurde. In den Theoremen 2.1 bzw. 2.2 aus [3] wurde eine Aussage über die Existenz stationärer FARCH(1, 1)-Zeitreihen für die Räume $L^2[0, 1]$ bzw. $C[0, 1]$ mit einer restriktiveren Annahme als (3.12) getroffen. Schließlich ist Satz 3.3 eine Verallgemeinerung unter einer schwächeren Bedingung von Theorem 1 in [11], da dort nur

eine hinreichende Bedingung für die Existenz stationärer FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihen für alle $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}$ mit Werten in $L^2[0, 1]$ angegeben und von $\mathbb{E} \ln^+ \|\varepsilon_0^2\|_\infty < \infty$ statt von der etwas schwächeren Bedingung (3.6) ausgegangen wurde. \blacklozenge

Nach dem folgenden Korollar lässt sich die Größe, die nach hinreichend vielen Iterationen der FARCH- bzw. FGARCH-Gleichungen angewendet auf einen beliebigen Startwert entsteht, als Realisation eines Folgenglieds einer FARCH- bzw. FGARCH-Zeitreihe interpretieren, was insbesondere bei Simulationen nützlich ist.

Korollar 3.5. Es gelten die eingangs von Satz 3.3 erwähnten Voraussetzungen und für ein $\nu > 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $\psi_{n,\nu}^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} < 1$ mit $\psi_{n,\nu}^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)}$ aus (3.13), womit eine stationäre Lösung $(\varsigma_k^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)})_{k \in \mathbb{Z}}$ der Gleichung (3.5) existiert. Für ein $N \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}_{\leq N}$ definieren wir $\tilde{\varsigma}_k^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} := \delta_k^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} + \Psi_k^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)}(\tilde{\varsigma}_{k-1}^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)})$ mit $\delta_k^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)}$ und $\Psi_k^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)}$ aus (3.5), wobei $\tilde{\varsigma}_0^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} \in F^{\mathfrak{s}*}$ für einen beliebigen deterministischen Startwert stehe. Dann gibt es ein $\rho \in (0, 1)$ mit

$$\mathbb{E} \|\varsigma_N^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} - \tilde{\varsigma}_N^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)}\|_{F^{\mathfrak{s}*}}^\nu = O(\rho^N). \quad (3.16)$$

Beweis. Per Definition von $\psi_{n,\nu}^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)}$ sowie $\tilde{\varsigma}_k^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)}$ für alle k , wegen Submultiplikativität der Norm $\|\cdot\|_{F^{\mathfrak{s}*}}$ und da $(\Psi_k^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)})_{k \in \mathbb{Z}}$ u.i.v. ist, gilt für o.B.d.A. $N = mn$ für ein $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|\varsigma_N^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} - \tilde{\varsigma}_N^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)}\|_{F^{\mathfrak{s}*}}^\nu &= \mathbb{E} \left\| \Psi_N^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} \Psi_{N-1}^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} \dots \Psi_1^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} (\varsigma_0^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} - \tilde{\varsigma}_0^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)}) \right\|_{F^{\mathfrak{s}*}}^\nu \\ &\leq (\psi_{n,\nu}^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)})^{N/n} \mathbb{E} \|\varsigma_0^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} - \tilde{\varsigma}_0^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)}\|_{F^{\mathfrak{s}*}}^\nu, \end{aligned}$$

womit die Behauptung wegen $\psi_{n,\nu}^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} < 1$ verifiziert ist. \square

3.3 Momente und Approximierbarkeit

In Anlehnung an die Resultate in [22] für das FARCH(1)-Modell und in [3] für das FGARCH(1, 1)-Modell geben wir nun eine hinreichende Bedingung für die Existenz diverser Momente und für die L^p - m -Approximierbarkeit F -wertiger FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)-Zeitreihen für alle $\mathbf{p} \in \mathbb{N}, \mathbf{q}^* \in \mathbb{N}^*$ sowie für alle $F \in \mathcal{F}$ an.

Lemma 3.6. Nachfolgend sei $F \in \mathcal{F}$, $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sei eine u.i.v. Zeitreihe mit $\mathbb{E} \|\varepsilon_0^2\|_F^\nu < \infty$ für ein $\nu > 0$, es gelte $\delta \in \dot{F}_{>0}$, für $i = 1, \dots, \mathbf{p}, j = 0, \dots, \mathbf{q}^*$ mit $\mathbf{p} \in \mathbb{N}, \mathbf{q}^* \in \mathbb{N}^*$ gelte $\alpha_i, \beta_j \in \mathcal{L}_{F, \dot{F}}$ mit $\alpha_i, \beta_j: F_{\geq 0} \rightarrow F_{\geq 0}, \beta_0 := 0_{\mathcal{L}_F}, \alpha_{\mathbf{p}} \neq 0_{\mathcal{L}_F}$ sowie $\beta_{\mathbf{q}^*} \neq 0_{\mathcal{L}_F}$ im Fall $\mathbf{q}^* \in \mathbb{N}$ und es gelte (3.13) für eben genanntes ν und ein $n \in \mathbb{N}$. Gemäß Satz 3.3 existiert folglich eine stationäre Lösung $(\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ der FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)-Gleichungen. Dabei besitzen $(\mathcal{X}_k)_k$ und die zugehörige Zeitreihe $(\sigma_k)_k$ folgende Eigenschaften:

- (a) Es gilt sowohl $\mathbb{E} \|\mathcal{X}_0^2\|_F^\nu < \infty$ als auch $\mathbb{E} \|\sigma_0^2\|_F^\nu < \infty$.
- (b) $(\mathcal{X}_k^2)_k$ ist eine geometrisch L_F^ν - m -approximierbare Zeitreihe und $(\sigma_k^2)_k$ ist eine geometrisch L_F^ν - m -approximierbare Zeitreihe.

Beweis.

(a) Wegen (3.14) gemäß Satz 3.3 gilt zunächst für alle $\nu > 0$:

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{s}_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{F^{s*}}^\nu &\lesssim \|\delta_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{F^{s*}}^\nu + \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left\| \Psi_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \Psi_{-1}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \dots \Psi_{-m+1}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \right\|_{\mathcal{L}_{F^{s*}}} \|\delta_{-m}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{F^{s*}} \right)^\nu \\ &\lesssim \|\delta_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{F^{s*}}^\nu + \sum_{m=1}^{n-1} \|\delta_{-m}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{F^{s*}}^\nu \prod_{l=1}^m \|\Psi_{-m+1}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{\mathcal{L}_{F^{s*}}}^\nu \\ &\quad + \left(\sum_{m=n}^{\infty} \left\| \Psi_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \Psi_{-1}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \dots \Psi_{-m+1}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \right\|_{\mathcal{L}_{F^{s*}}} \|\delta_{-m}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{F^{s*}} \right)^\nu. \end{aligned}$$

Aufgrund von $\mathbb{E} \|\varepsilon_0^2\|_F^\nu < \infty$ gilt zunächst

$$\mathbb{E} \|\delta_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{F^{s*}}^\nu \lesssim 1 + \mathbb{E} \|\varepsilon_0^2\|_F^\nu < \infty.$$

Ferner gilt wegen $\mathbb{E} \|\Psi_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{\mathcal{L}_{F^{s*}}}^\nu \lesssim 1 + \mathbb{E} \|\varepsilon_0^2\|_F^\nu + (\mathfrak{s}^*)^{\nu/2}$ nach (3.8), per Definition der Matrizen $\Psi_k^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}$ sowie der Vektoren $\delta_k^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}$ für alle k und weil die Zeitreihe $(\varepsilon_k)_k$ u.i.v. ist:

$$\mathbb{E} \left(\sum_{m=1}^{n-1} \|\delta_{-m}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{F^{s*}}^\nu \prod_{l=1}^m \|\Psi_{-m+l}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{\mathcal{L}_{F^{s*}}}^\nu \right) = \mathbb{E} \|\delta_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{F^{s*}}^\nu \sum_{m=1}^{n-1} \left(\mathbb{E} \|\Psi_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{\mathcal{L}_{F^{s*}}}^\nu \right)^m < \infty.$$

Außerdem gilt im Fall $\nu \in (0, 1]$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left(\sum_{m=n}^{\infty} \left\| \Psi_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \Psi_{-1}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \dots \Psi_{-m+1}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \right\|_{\mathcal{L}_{F^{s*}}} \|\delta_{-m}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{F^{s*}} \right)^\nu \\ &\leq \mathbb{E} \|\delta_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{F^{s*}}^\nu \sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{E} \left\| \Psi_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \Psi_{-1}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \dots \Psi_{-m+1}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \right\|_{\mathcal{L}_{F^{s*}}}^\nu \\ &\leq \mathbb{E} \|\delta_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{F^{s*}}^\nu \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathbb{E} \|\Psi_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{\mathcal{L}_{F^{s*}}}^\nu \right)^k \right) \sum_{l=1}^{\infty} (\psi_{n, \nu}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)})^l < \infty \end{aligned}$$

und im Fall $\nu > 1$ gilt nach Jensen'scher Ungleichung und dem Satz von Beppo Levi:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left(\sum_{m=n}^{\infty} \left\| \Psi_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \Psi_{-1}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \dots \Psi_{-m+1}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \right\|_{\mathcal{L}_{F^{s*}}} \|\delta_{-m}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{F^{s*}} \right)^\nu \\ &\leq \mathbb{E} \|\delta_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{F^{s*}}^\nu \left(\sum_{m=n}^{\infty} \left(\mathbb{E} \left\| \Psi_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \Psi_{-1}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \dots \Psi_{-m+1}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)} \right\|_{\mathcal{L}_{F^{s*}}}^\nu \right)^{1/\nu} \right)^\nu \\ &\leq \mathbb{E} \|\delta_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{F^{s*}}^\nu \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathbb{E} \|\Psi_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{\mathcal{L}_{F^{s*}}}^\nu \right)^k \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} (\psi_{n, \nu}^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)})^l \right)^\nu < \infty. \end{aligned}$$

Für alle $\mathfrak{p} \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{q}^* \in \mathbb{N}^*$ gilt somit insgesamt $\mathbb{E} \|\mathfrak{s}_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{F^{s*}}^\nu < \infty$. Demzufolge gilt wie behauptet $\mathbb{E} \|\mathcal{X}_0^2\|_F^\nu < \infty$. Im Fall $\mathfrak{q}^* \in \mathbb{N}$ folgt aus $\mathbb{E} \|\mathfrak{s}_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}\|_{F^{s*}}^\nu < \infty$ für die $(\mathfrak{p} + 1)$ -te Komponente von $\mathfrak{s}_0^{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^*)}$ außerdem $\mathbb{E} \|\sigma_0^2\|_F^\nu < \infty$, woraus wegen Stationarität von $(\mathcal{X}_k)_k$ und $(\sigma_k)_k$ per Definition von σ_0^2 wiederum tatsächlich folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|\sigma_0^2\|_F^\nu &\lesssim \|\delta\|_F^\nu + \sum_{i=1}^{\mathfrak{p}} \mathbb{E} \|\alpha_i(\mathcal{X}_i^2)\|_F^\nu + \sum_{j=1}^{\mathfrak{q}^*} \mathbb{E} \|\beta_j(\sigma_j^2)\|_F^\nu \\ &\leq \|\delta\|_F^\nu + \mathbb{E} \|\mathcal{X}_0^2\|_F^\nu \sum_{i=1}^{\mathfrak{p}} \|\alpha_i\|_{\mathcal{L}_{F, \dot{F}}}^\nu + \mathbb{E} \|\sigma_0^2\|_F^\nu \sum_{j=1}^{\mathfrak{q}^*} \|\beta_j\|_{\mathcal{L}_{F, \dot{F}}}^\nu < \infty. \end{aligned}$$

Des Weiteren erhalten wir im Fall $\mathbf{q}^* = 0$ wie behauptet:

$$\mathbb{E} \|\sigma_0^2\|_F^\nu \lesssim \|\delta\|_F^\nu + \mathbb{E} \|\mathcal{X}_0^2\|_F^\nu \sum_{i=1}^p \|\alpha_i\|_{\mathcal{L}_{F,\hat{F}}}^\nu < \infty.$$

(b) Aufgrund von (3.14) gilt

$$\begin{aligned} \varsigma_{m,m}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} &:= \delta_m^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} + \sum_{l=1}^{m-1} \Psi_m^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} \Psi_{m-1}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} \dots \Psi_{m-l+1}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} (\delta_{m-l}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)}) \\ &+ \sum_{l=m}^{\infty} \Psi_m^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} \Psi_{m-1}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} \dots \Psi_1^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} \Psi_0^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*,m)} \Psi_{-1}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*,m)} \dots \Psi_{m-l+1}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*,m)} (\delta_{m-l}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*,m)}) \end{aligned}$$

f.s. für alle $m \in \mathbb{N}$, wobei $\Psi_k^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*,m)}$ bzw. $\delta_k^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*,m)}$ die Matrizen bzw. Vektoren aus (3.5) in Abhängigkeit von $\varepsilon_k^{(m)}$ sind und $(\varepsilon_k^{(m)})_{k \in \mathbb{Z}}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ voneinander stochastisch unabhängige, u.i.v. Zeitreihen mit $\varepsilon_k^{(m)} \stackrel{d}{=} \varepsilon_0$ für alle k, m sind. Demnach gilt für alle m :

$$\begin{aligned} &\left\| \varsigma_m^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} - \varsigma_{m,m}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} \right\|_{F^{s*}} \\ &\leq \sum_{l=m}^{\infty} \left(\left\| \Psi_m^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} \Psi_{m-1}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} \dots \Psi_{m-l+1}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} \right\|_{\mathcal{L}_{F^{s*}}} \left\| \delta_{m-l}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} \right\|_{F^{s*}} \right. \\ &\quad \left. + \left\| \Psi_m^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} \Psi_{m-1}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} \dots \Psi_1^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} \Psi_0^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*,m)} \Psi_{-1}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*,m)} \dots \Psi_{m-l+1}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*,m)} \right\|_{\mathcal{L}_{F^{s*}}} \left\| \delta_{m-l}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*,m)} \right\|_{F^{s*}} \right). \end{aligned}$$

Aus den Überlegungen im Nachweis von Teil (a) und der Tatsache, dass $\varepsilon_k^{(n)}$ und ε_l für alle k, l, n u.i.v. sind, folgt im Fall $\nu \in (0, 1]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| \varsigma_m^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} - \varsigma_{m,m}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} \right\|_{F^{s*}}^\nu &\leq 2 \mathbb{E} \|\delta_0^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)}\|_{F^{s*}}^\nu \sum_{l=m}^{\infty} \mathbb{E} \left\| \Psi_m^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} \Psi_{m-1}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} \dots \Psi_{m-l+1}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} \right\|_{\mathcal{L}_{F^{s*}}}^\nu \\ &\leq 2 \mathbb{E} \|\delta_0^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)}\|_{F^{s*}}^\nu \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathbb{E} \|\Psi_0^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)}\|_{\mathcal{L}_{F^{s*}}}^\nu \right)^k \right) \sum_{j=m}^{\infty} (\psi_{n,\nu}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)})^j \\ &= (\psi_{n,\nu}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)})^m \frac{2 \mathbb{E} \|\delta_0^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)}\|_{F^{s*}}^\nu}{1 - \psi_{n,\nu}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathbb{E} \|\Psi_0^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)}\|_{\mathcal{L}_{F^{s*}}}^\nu \right)^k \propto (\psi_{n,\nu}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)})^m. \end{aligned}$$

Im Fall $\nu > 1$ ergibt sich mit Hilfe der Argumentation in (a) für $\nu > 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| \varsigma_m^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} - \varsigma_{m,m}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} \right\|_{F^{s*}}^\nu &\leq \left(\sum_{m=n}^{\infty} 2 \left(\mathbb{E} \left\| \Psi_m^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} \Psi_{m-1}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} \dots \Psi_{m-l+1}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)} \right\|_{\mathcal{L}_{F^{s*}}}^\nu \right)^{1/\nu} \right)^\nu \\ &\leq 2^\nu \mathbb{E} \|\delta_0^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)}\|_{F^{s*}}^\nu \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathbb{E} \|\Psi_0^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)}\|_{\mathcal{L}_{F^{s*}}}^\nu \right)^k \right) \left(\sum_{j=m}^{\infty} (\psi_{n,\nu}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)})^{j/\nu} \right)^\nu \\ &\propto (\psi_{n,\nu}^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)})^{m/\nu}. \end{aligned}$$

Für alle $\mathbf{p} \in \mathbb{N}, \mathbf{q}^* \in \mathbb{N}^*$ und $\nu > 0$ ist $(\varsigma_k^{(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)})_k$ folglich $L_{F^{s*}}^\nu$ - m -approximierbar, womit (b) nach der Argumentation in (a) gezeigt ist. \square

Bemerkung 3.7. Für eine weitere hinreichende Bedingung für die Existenz bestimmter Momente von FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihen mit $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}$ siehe [11], Proposition 2. \blacklozenge

4 Schätzung

In diesem Kapitel widmen wir uns der Schätzung sowohl von δ als auch der Operatoren von \mathcal{H} -wertigen FARCH- sowie FGARCH-Zeitreihen mit $\mathcal{H} := L^2[0, 1]$, mit beliebigen, uns bekannten Ordnungen. Mit der Schätzung von δ und der Operatoren \mathcal{H} -wertiger FARCH- bzw. FGARCH-Zeitreihen befassten sich Hörmann, Horváth und Reeder [22], Aue, Horváth und Pellatt [3] sowie Cerovecki, Francq, Hörmann und Zakoïan [11]. In [22] wurde ein Konsistenzresultat im Sinne stochastischer Konvergenz mit konkreten Raten für den Schätzfehler des Schätzers sowohl für die Projektion von δ als auch für die Projektion des Operators α_1 auf einen endlichdimensionalen Unterraum im FARCH(1)-Modell angegeben. Ferner wurde in [3] das FGARCH(1, 1)-Modell analysiert, wobei dort ein Konsistenzresultat im Sinne fast sicherer Konvergenz für die Schätzfehler der Schätzer für die Projektion von δ und der Operatoren α_1, β_1 auf einen endlichdimensional Unterraum formuliert wurde; allerdings ohne Angabe einer konkreten Rate. Schließlich wurde in [11] ein Konsistenzresultat für den Schätzfehler des Schätzers für die Projektion von δ und für die Operatoren im FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Modell mit $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}$ auf einen endlichdimensionalen Unterraum im Sinne fast sicherer Konvergenz formuliert. Auch wurde in [11] ein Konsistenzresultat für den Schätzfehler des Schätzers für δ und für die Operatoren im FGARCH(1, 1)-Modell angegeben, ohne diese Größen auf einen endlichdimensionalen Unterraum zu projizieren. In beiden Resultaten wurden keine Raten angegeben.

Die genannten Resultate werden wir in diesem Kapitel in vielerlei Hinsicht ergänzen, wobei die Konsistenzresultate des Schätzfehlers des Schätzers für δ und der quadratischen Schätzfehler der Schätzer für alle Operatoren im Sinne stochastischer Konvergenz formuliert und stets konkrete Raten angegeben werden. Dabei werden in Abschnitt 4.1 alle zur Schätzung von δ und der Operatoren notwendigen Hilfsmittel aufgelistet. In Abschnitt 4.2 formulieren wir ein Konsistenzresultat des Schätzfehlers des Schätzers für δ aus dem FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)-Modell für alle $\mathbf{p} \in \mathbb{N}, \mathbf{q}^* \in \mathbb{N}^*$, und zwar ohne δ auf einen endlichdimensionalen Unterraum zu projizieren. In Abschnitt 4.3 geben wir Konsistenzresultate für die quadratischen Schätzfehler der Schätzer sowohl für die auf einen endlichdimensional Unterraum projizierten Operatoren im FARCH(\mathbf{p})-Modell für alle $\mathbf{p} \in \mathbb{N}$ an, als auch für die Operatoren, ohne auf einen endlichdimensionalen Unterraum zu projizieren. Schließlich werden wir in Abschnitt 4.4 Konsistenzresultate für die quadratischen Schätzfehler der Schätzer für die Operatoren im FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)-Modell für alle $\mathbf{p} \in \mathbb{N}, \mathbf{q}^* \in \mathbb{N}^*$ angeben, ohne die Operatoren auf einen endlichdimensionalen Unterraum zu projizieren.

Zur Modellierung gehen wir davon aus, dass $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist, dass alle genannten Zufallsvariablen bzgl. \mathfrak{A} messbar sind und dass $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine \mathcal{H} -wertige FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)-Zeitreihe mit $\mathbf{p} \in \mathbb{N}, \mathbf{q}^* \in \mathbb{N}^*$ ist, d.h.

$$\mathcal{X}_k = \varepsilon_k \odot \sigma_k, \quad \sigma_k^2 = \delta + \sum_{i=1}^{\mathbf{p}} \alpha_i(\mathcal{X}_{k-i}^2) + \sum_{j=1}^{\mathbf{q}^*} \beta_j(\sigma_{k-j}^2) \quad (4.1)$$

f.s. für alle k . Dabei setzen wir $\delta \in L^4_{>0}[0,1]$ voraus, für die Operatoren verlangen wir $\alpha_i, \beta_j \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}, L^4[0,1]}$ und $\alpha_i, \beta_j: \mathcal{H}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{H}_{\geq 0}$ für alle i, j . Des Weiteren werden wir stets davon ausgehen, dass $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine u.i.v. Zeitreihe aus Innovationen mit $\mathbb{E} \|\varepsilon_0^2\|_{L^4[0,1]}^4 < \infty$ und

$$\mathbb{E}(\varepsilon_0^2(t)) = 1 \quad (4.2)$$

für λ -f.a. $t \in [0,1]$ ist, und wir werden stets (3.13) für ein $n \in \mathbb{N}$ und $\nu = 4$ voraussetzen.

Damit ist \mathcal{X} nach Satz 3.3 eine stationäre, bzgl. $(\varepsilon_k)_k$ kausale, ergodische FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)-Zeitreihe, wobei die zugehörige Zeitreihe $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ebenso bzgl. $(\varepsilon_k)_k$ kausal und ergodisch sowie σ_k für alle k stochastisch unabhängig von ε_k ist. Des Weiteren folgt aus den eben genannten Annahmen nach Lemma 3.6 $\mathbb{E} \|\mathcal{X}_0^2\|_{\mathcal{H}}^4 < \infty$ sowie $\mathbb{E} \|\sigma_0^2\|_{L^4[0,1]}^4 < \infty$, dass $(\mathcal{X}_k^2)_k$ geometrisch $L^4_{\mathcal{H}}$ - m -approximierbar und $(\sigma_k^2)_k$ geometrisch $L^4_{L^4[0,1]}$ - m -approximierbar ist.

4.1 Vorbereitung

Wir listen nun diverse zur Schätzung von δ und der Operatoren im FARCH-, sowie im FGARCH-Modell benötigten technischen Hilfsmittel auf. Da für die Schätzung der Operatoren auch Aussagen für andere separable Hilbert-Räume als \mathcal{H} benötigt werden, werden die Aussagen in diesem Abschnitt für beliebige separable Hilbert-Räume formuliert, für die wir $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$, $(\mathcal{H}', \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}'})$ sowie $(\mathcal{H}'', \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}''})$ schreiben, wobei wir als Norm stets die durch die jeweiligen Skalarprodukte induzierten Normen verwenden.

Zunächst formulieren wir eine Aussage, die vor allem bei der Schätzung von Operatoren benötigt wird.

Lemma 4.1. *Es sei $(\hat{X}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ eine für $h \in \mathcal{H}$ schwach konsistente Folge \mathcal{H} -wertiger Zufallsvariablen, d.h. $\|\hat{X}_N - h\|_{\mathcal{H}} = o_{\mathbb{P}}(1)$. Dann gilt $\|\hat{X}_N\|_{\mathcal{H}} = O_{\mathbb{P}}(1)$.*

Beweis. Folgt unmittelbar aus $\|\hat{X}_N\|_{\mathcal{H}} \leq \|\hat{X}_N - h\|_{\mathcal{H}} + \|h\|_{\mathcal{H}}$. □

4.1.1 Schätzung von Erwartungswerten und Autokovarianzoperatoren

Die quadratischen Schätzfehler der Schätzer für die Operatoren im FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)-Modell beinhalten quadratische Schätzfehler der Schätzer für bestimmte Autokovarianzoperatoren. Wir definieren die empirischen Versionen von Autokovarianzoperatoren, geben einige Eigenschaften dieser Operatoren an und formulieren ein Konsistenzresultat für die quadratischen Schätzfehler der Schätzer für Autokovarianzoperatoren. Für die Definition dieser empirischen Versionen benötigen wir folgendes Resultat.

Satz 4.2. *Es sei X_1, \dots, X_N eine Stichprobe einer stationären $L^2_{\mathcal{H}}$ - m -approximierbaren Zeitreihe $\mathbf{X} = (X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit $n, N \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$\hat{m}_l = \hat{m}_l(\mathbf{X}) := N^{-1} \sum_{i=1}^N X_i^l \quad (4.3)$$

ein erwartungstreuer Schätzer für $m_l := \mathbb{E}(X_1^l)$ für jedes $l = 1, \dots, n$ mit

$$\mathbb{E} \|\hat{m}_l - m_l\|_{\mathcal{H}}^2 = O(N^{-1}). \quad (4.4)$$

Beweis. Für jedes $l = 1, \dots, n$ folgt Erwartungstreue aus der Tatsache, dass X_1^l, \dots, X_N^l identisch verteilt und \mathbb{P} -Bochner-integrierbar sind. Ferner gilt für jedes $l = 1, \dots, n$ sowie $N \in \mathbb{N}$ wegen Stationarität und $L_{\mathcal{H}}^2$ - m -Approximierbarkeit von $(X_k^l)_k$, wegen (2.33) aufgrund stochastischer Unabhängigkeit von X_1^l und $X_{1+k,k}^l$ für alle $k \in \mathbb{N}$ sowie wegen der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung mit $\nu_{2,\mathcal{H}}(\cdot) := (\mathbb{E} \|\cdot\|_{\mathcal{H}}^2)^{1/2}$ (siehe [22], S.7 f.):

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|\hat{m}_l - m_l\|_{\mathcal{H}}^2 &= N^{-2} \sum_{i,j=1}^N \mathbb{E} \langle X_i^l - m_l, X_j^l - m_l \rangle_{\mathcal{H}} \\ &\leq N^{-1} \left[\mathbb{E} \|X_1^l - m_l\|_{\mathcal{H}}^2 + 2 \nu_{2,\mathcal{H}}(X_1^l - m_l) \sum_{k=1}^{\infty} \nu_{2,\mathcal{H}}(X_{1+k}^l - X_{1+k,k}^l) \right] \\ &= O(N^{-1}). \end{aligned} \quad \square$$

Definition und Eigenschaften 4.3. Es sei X_1, \dots, X_N eine Stichprobe einer stationären $L_{\mathcal{H}}^2$ -Zeitreihe $\mathbf{X} = (X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ für ein $N \in \mathbb{N}$, es sei $h \in \mathbb{Z}$ mit $|h| < N - 1$ und es gelte $N_h := N - |h|$. Wir definieren die Autokovarianzoperatoren $\hat{\mathcal{C}}_h = \hat{\mathcal{C}}_{h,\mathbf{X}}(N): \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ basierend auf X_1, \dots, X_N durch

$$\hat{\mathcal{C}}_h := \begin{cases} \frac{1}{N_h} \sum_{k=|h|+1}^N X_k \otimes X_{k+h}, & -N < h < 0, \\ \frac{1}{N_h} \sum_{k=1}^{N_h} X_k \otimes X_{k+h}, & 0 \leq h < N - 1, \end{cases} \quad (4.5)$$

falls \mathbf{X} zentriert ist und durch

$$\hat{\mathcal{C}}_h := \begin{cases} \frac{1}{N_h - 1} \sum_{k=|h|+1}^N (X_k - \hat{m}_1) \otimes (X_{k+h} - \hat{m}_1), & -N < h < 0, \\ \frac{1}{N_h - 1} \sum_{k=1}^{N_h} (X_k - \hat{m}_1) \otimes (X_{k+h} - \hat{m}_1), & 0 \leq h < N - 1, \end{cases} \quad (4.6)$$

mit $\hat{m}_1 = \hat{m}_1(\mathbf{X}) := N_h^{-1} \sum_{i=1}^{N_h} X_i$, falls \mathbf{X} nicht notwendigerweise zentriert ist.

Für alle h ist $\hat{\mathcal{C}}_h$ aus (4.5) und (4.6) Element von $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ mit $\hat{\mathcal{C}}_h^* = \hat{\mathcal{C}}_{-h}$. Des Weiteren ist der empirische Kovarianzoperator $\hat{\mathcal{C}}_0$ selbstadjungiert und positiv semidefinit.

Beweis. Wir weisen die Eigenschaften ausschließlich für die Operatoren aus (4.5) nach, da die Eigenschaften der Operatoren aus (4.6) auf gleiche Weise verifiziert werden können.

Für h mit o.B.d.A. $0 \leq h < N - 1$ ist $\hat{\mathcal{C}}_h$ per Definition Element von $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ mit

$$\langle \hat{\mathcal{C}}_h(x), y \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle x, N_h^{-1} \sum_{k=1}^{N_h} \langle X_{k+h}, y \rangle_{\mathcal{H}} X_k \right\rangle_{\mathcal{H}} = \langle x, \hat{\mathcal{C}}_{-h}(y) \rangle_{\mathcal{H}}$$

für alle $x, y \in \mathcal{H}$, d.h. $\hat{\mathcal{C}}_h^* = \hat{\mathcal{C}}_{-h}$. Folglich ist $\hat{\mathcal{C}}_0$ selbstadjungiert und aufgrund von $\langle \hat{\mathcal{C}}_0(x), x \rangle_{\mathcal{H}} = N^{-1} \sum_{k=1}^N \langle X_k, x \rangle_{\mathcal{H}}^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$ positiv semidefinit. \square

Satz 4.4. Es stehe X_1, \dots, X_N für eine Stichprobe mit $N \in \mathbb{N}$ einer $L_{\mathcal{H}}^4$ - m -approximierbaren Zeitreihe $\mathbf{X} = (X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.

- (a) Falls \mathbf{X} zentriert ist, ist $\hat{\mathcal{C}}_h$ aus (4.5) ein erwartungstreuer Schätzer für \mathcal{C}_h für alle h mit $|h| < N - 1$. Ferner gilt

$$\mathbb{E} \|\hat{\mathcal{C}}_h - \mathcal{C}_h\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O(N^{-1}) \quad (4.7)$$

für alle $h \in \mathbb{Z}$, für Folgen $(h_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$ mit $h = h_N = \Xi(1, N)$ gilt

$$\mathbb{E} \|\hat{\mathcal{C}}_h - \mathcal{C}_h\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O(hN^{-1}). \quad (4.8)$$

- (b) Falls \mathbf{X} nicht notwendigerweise zentriert ist, ist $\hat{\mathcal{C}}_h$ für h mit $|h| < N - 1$ aus (4.6) nicht notwendigerweise ein erwartungstreuer Schätzer für \mathcal{C}_h . Ferner gilt

$$\|\hat{\mathcal{C}}_h - \mathcal{C}_h\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(N^{-1}) \quad (4.9)$$

für alle $h \in \mathbb{Z}$, für Folgen $(h_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$ mit $h = h_N = \Xi(1, N)$ gilt

$$\|\hat{\mathcal{C}}_h - \mathcal{C}_h\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(hN^{-1}). \quad (4.10)$$

Beweis. Wegen $\|\hat{\mathcal{C}}_h^* - \mathcal{C}_h^*\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}} = \|\hat{\mathcal{C}}_{-h} - \mathcal{C}_{-h}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}$ für alle $h \in \mathbb{Z}$ verifizieren wir die Konsistenzresultate für o.B.d.A. h mit $0 \leq h < N - 1$. Zunächst zeigen wir jedoch, dass aus $L_{\mathcal{H}}^4$ - m -Approximierbarkeit von $\mathbf{X} = (X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ für alle $h \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \nu_{2, \mathcal{S}_{\mathcal{H}}}(X_m \otimes X_{m+h} - X_{m,m} \otimes X_{m+h,m}) < \infty \quad (4.11)$$

folgt und $(X_k \otimes X_{k+h})_{k \in \mathbb{Z}}$ somit für alle $h \leq 0$ $L_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2$ - m -approximierbar ist. In der Tat gilt für alle $h \in \mathbb{Z}$ per Definition der Norm $\nu_{2, \mathcal{S}_{\mathcal{H}}}$, der Eigenschaften 2.17, wegen elementaren Ungleichungen und weil \mathbf{X} $L_{\mathcal{H}}^4$ - m -approximierbar und damit auch stationär ist:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \nu_{2, \mathcal{S}_{\mathcal{H}}}(X_m \otimes X_{m+h} - X_{m,m} \otimes X_{m+h,m}) \\ & \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left[\mathbb{E} \|X_m - X_{m,m}\|_{\mathcal{H}}^4 \mathbb{E} \|X_{m+h}\|_{\mathcal{H}}^4 \right]^{1/4} + \left[\mathbb{E} \|X_{m,m}\|_{\mathcal{H}}^4 \mathbb{E} \|X_{m+h} - X_{m+h,m}\|_{\mathcal{H}}^4 \right]^{1/4} \\ & \lesssim \sum_{m=1}^{\infty} \nu_{4, \mathcal{H}}(X_m - X_{m,m}) < \infty. \end{aligned}$$

- (a) Hier verwenden wir Beweiseideen des Theorems 3.1 aus [23]. Per Definition und weil \mathbf{X} eine stationäre $L_{\mathcal{H}}^2$ -Zeitreihe ist, sind die empirischen Autokovarianzoperatoren $\hat{\mathcal{C}}_h$ aus (4.5) für alle h mit $|h| < N - 1$ erwartungstreu Schätzer für \mathcal{C}_h . Des Weiteren gilt für alle h mit $0 \leq h < N - 1$ per Definition von \mathcal{C}_h und $\hat{\mathcal{C}}_h$ aus (4.5) und wegen Stationarität von \mathbf{X} mit $X_{[m;h]} := X_m \otimes X_{m+h} - \mathcal{C}_h$ für alle m :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|\hat{\mathcal{C}}_h - \mathcal{C}_h\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 &= N_h^{-2} \sum_{k,l=1}^{N_h} \mathbb{E} \langle X_{[k;h]}, X_{[l;h]} \rangle_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}} = N_h^{-2} \sum_{|r| < N_h} (N_h - |r|) \mathbb{E} \langle X_{[1;h]}, X_{[1+r;h]} \rangle_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}} \\ &\lesssim N_h^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{E} \langle X_{[1;h]}, X_{[1+r;h]} \rangle_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Dabei gilt wegen stochastischer Unabhängigkeit von $X_1 \otimes X_{1+h}$ und $X_{1+r,r-h} \otimes X_{1+r+h,r-h}$ für $r > h$, was aus stochastischer Unabhängigkeit von X_{1+h} und $X_{1+r,r-h}$ für $r > h$ folgt, wegen Zentriertheit von $X_{[1+r,r-h;h]}$ für alle h, r mit $X_{[k,l;h]} := X_{k,l} \otimes X_{k+h,l} - \mathcal{C}_h$ für alle k sowie l , (4.11), der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung und Stationarität von \mathbf{X} :

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{E} \langle X_{[1;h]}, X_{[1+r;h]} \rangle_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}} \\ &= \sum_{r=0}^h \mathbb{E} \langle X_{[1;h]}, X_{[1+r;h]} \rangle_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}} + \sum_{r>h} \mathbb{E} \langle X_{[1;h]}, X_{[1+r;h]} - X_{[1+r,r-h;h]} \rangle_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}} \\ &\leq (h+1) \nu_{2,\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}(X_{[1;h]}) \left[\nu_{2,\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}(X_{[1;h]}) + \sum_{m=1}^{\infty} \nu_{2,\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}(X_{[m;h]} - X_{[m,m;h]}) \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Aus (4.12) und (4.13) folgt dann, wie behauptet sowohl (4.7) als auch (4.8).

(b) Per Definition von $\hat{\mathcal{C}}_h = \hat{\mathcal{C}}_{h;\mathbf{X}}(N)$ aus (4.6) mit $\hat{m}_1 = \hat{m}_1(\mathbf{X}) := N_h^{-1} \sum_{i=1}^{N_h} X_i$ und Bilineartität von $\otimes: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ gilt für jedes $h \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq h < N-1$ und $N_h := N-h$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{\mathcal{C}}_h) &= \frac{1}{N_h(N_h-1)} \left(\sum_{k=1}^{N_h} N_h \mathbb{E}(X_k \otimes X_{k+h}) - \sum_{i=1}^{N_h} \mathbb{E}(X_i \otimes X_{k+h}) \right) \\ &= \mathcal{C}_h - \frac{1}{N_h(N_h-1)} \sum_{\substack{1 \leq i, k \leq N_h, \\ i \neq k}} \mathcal{C}_{k+h-i}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

wobei $\mathcal{C}_{k+h-i} := \mathbb{E}((X_i - m_1) \otimes (X_{k+h} - m_1)) = \mathbb{E}(X_i \otimes X_{k+h}) - m_1 \otimes m_1$ im letzten Schritt für alle $i, k = 1, \dots, N_h$ eingegangen ist und demzufolge $\hat{\mathcal{C}}_h$ in der Tat kein notwendigerweise erwartungstreuer Schätzer für \mathcal{C}_h ist. Außerdem gilt für jedes h mit $0 \leq h < N-1$ und $m_1 := \mathbb{E}(X_1)$

$$\hat{\mathcal{C}}_h = \frac{N_h}{N_h-1} (m_1 - \hat{m}_1) \otimes (m_1 - \hat{m}_1) + \frac{1}{N_h-1} \sum_{k=1}^{N_h} (X_k - m_1) \otimes (X_{k+h} - m_1),$$

woraus wiederum mit $Y_k := X_k - m_1$ für alle k nach Definition der Autokovarianzoperatoren aus der zentrierten Zeitreihe $\mathbf{Y} = (Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit $\mathcal{C}_{h;\mathbf{X}} = \mathcal{C}_{h;\mathbf{Y}}$ folgt:

$$\begin{aligned} & \|\hat{\mathcal{C}}_{h;\mathbf{X}} - \mathcal{C}_{h;\mathbf{X}}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \\ &\lesssim \left(\frac{N_h}{N_h-1} \right)^2 \|(m_1 - \hat{m}_1) \otimes (m_1 - \hat{m}_1)\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 + \left\| \frac{1}{N_h-1} \sum_{k=1}^{N_h} Y_k \otimes Y_{k+h} - \mathcal{C}_{h;\mathbf{Y}} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \\ &= \left(\frac{N_h}{N_h-1} \right)^2 \left[\|\hat{m}_1 - m_1\|_{\mathcal{H}}^4 + \|\hat{\mathcal{C}}_{h;\mathbf{Y}} - \mathcal{C}_{h;\mathbf{Y}}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 + N_h^{-2} \|\mathcal{C}_{h;\mathbf{Y}}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dabei gilt nach (4.4) für den Schätzer $\hat{m}_1 := N_h^{-1} \sum_{i=1}^{N_h} X_i$ für m_1 , da \mathbf{X} insbesondere $L_{\mathcal{H}}^2$ - m -approximierbar ist und wegen $N_h^{-1} \sim N$ für jedes feste $h \in \mathbb{Z}$ sowie für Folgen $(h_N)_{N \in \mathbb{N}}$ mit $h = h_N = \Xi(1, N)$: $\mathbb{E}\|\hat{m}_1 - m_1\|_{\mathcal{H}}^2 = O(N^{-1})$, woraus wiederum $\|\hat{m}_1 - m_1\|_{\mathcal{H}}^4 = O_{\mathbb{P}}(N^{-2})$ folgt. Aus der Identität (4.15) folgt dann wegen (4.9)

$$\|\hat{\mathcal{C}}_{h;\mathbf{X}} - \mathcal{C}_{h;\mathbf{X}}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \lesssim \left(\frac{N_h}{N_h-1} \right)^2 \left[O_{\mathbb{P}}(N^{-2}) + O_{\mathbb{P}}(N^{-1}) + N_h^{-2} \right] = O_{\mathbb{P}}(N^{-1})$$

für jedes feste h . Für jede Folge $(h_N)_N$ mit $h = h_N = \Xi(1, N)$ gilt nach (4.10)

$$\|\hat{\mathcal{C}}_{h;\mathbf{X}} - \mathcal{C}_{h;\mathbf{X}}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \lesssim \left(\frac{N_h}{N_h-1} \right)^2 \left[O_{\mathbb{P}}(N^{-2}) + O_{\mathbb{P}}(hN^{-1}) + N_h^{-2} \right] = O_{\mathbb{P}}(hN^{-1}). \quad \square$$

Bemerkung 4.5.

- (a) Die Verwendung von $\frac{1}{N_h-1}$ statt $\frac{1}{N_h}$ bei der Definition von $\hat{\mathcal{C}}_h$ ist vor allem im Fall $h = 0$ bei einer Stichprobe einer stochastischen unabhängigen $L^2_{\mathcal{H}}$ -Zeitreihe plausibel, weil $\hat{\mathcal{C}}_0$ dann wegen (4.14) und (2.33) ein erwartungstreuer Schätzer für \mathcal{C}_0 ist.
- (b) Satz 4.4 ist eine Verallgemeinerung von Theorem 3.1 in [23], da die Zeitreihen Werte in beliebigen separablen Hilbert-Räumen, statt nur in \mathcal{H} annehmen dürfen, das Konsistenzresultat für alle \mathcal{C}_h , statt ausschließlich für \mathcal{C}_0 gültig ist, h in bestimmter Weise vom Stichprobenumfang N abhängen kann und die Zeitreihe \mathbf{X} nicht notwendigerweise zentriert sein muss. \blacklozenge

4.1.2 Durch FGARCH- induzierte FARMA-Zeitreihen

Wir werden sehen, dass FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)-Zeitreihen FARMA($\mathbf{r}^*, \mathbf{q}^*$)-Zeitreihen (siehe Abschnitt 2.5) mit $\mathbf{r}^* := \max\{\mathbf{p}, \mathbf{q}^*\}$ induzieren. Diese *durch FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)-Zeitreihen induzierten FARMA($\mathbf{r}^*, \mathbf{q}^*$)-Zeitreihen* werden wir sowohl bei der Schätzung von δ als auch der Operatoren der FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)-Zeitreihen verwenden.

Wegen (4.1) und $\nu_k := \mathcal{X}_k^2 - \sigma_k^2$ für alle k folgt mit $\xi_1 := \alpha_1 + \beta_1, \dots, \xi_{\mathbf{r}^*} := \alpha_{\mathbf{r}^*} + \beta_{\mathbf{r}^*}$ und $\eta_1 := -\beta_1, \dots, \eta_{\mathbf{q}^*} := -\beta_{\mathbf{q}^*}$

$$\mathcal{X}_k^2 = \delta + \nu_k + \sum_{i=1}^{\mathbf{r}^*} \xi_i(\mathcal{X}_{k-i}^2) + \sum_{j=1}^{\mathbf{q}^*} \eta_j(\nu_{k-j}) \quad (4.16)$$

für alle k f.s. Ferner gilt wegen $\mathbb{E}(\mathcal{X}_k^2(t)) = \mathbb{E}(\sigma_k^2(t)) \mathbb{E}(\varepsilon_k^2(t)) = \mathbb{E}(\sigma_k^2(t))$ für alle k sowie λ -f.a. $t \in [0, 1]$ und nach Eigenschaften 2.23 (e)

$$\mathcal{Z}_k := \mathcal{X}_k^2 - m_2 = \nu_k + \sum_{i=1}^{\mathbf{r}^*} \xi_i(\mathcal{Z}_{k-i}) + \sum_{j=1}^{\mathbf{q}^*} \eta_j(\nu_{k-j}) \quad (4.17)$$

mit $m_2 := \mathbb{E}(\mathcal{X}_1^2)$ für alle k f.s. Folglich ist $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine FARMA($\mathbf{r}^*, \mathbf{q}^*$)-Zeitreihe mit Innovationen $\nu_k := \mathcal{X}_k^2 - \sigma_k^2$ für alle k , wobei die Zeitreihe $\boldsymbol{\nu} = (\nu_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ wegen Kausalität von $(\sigma_k)_k$ bzgl. $\boldsymbol{\varepsilon} := (\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ und wegen $\nu_k = \sigma_k^2 \odot (\varepsilon_k^2 - 1)$ für alle k im Gegensatz zur Zeitreihe $\boldsymbol{\varepsilon}$ aus Innovationen der FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)-Zeitreihe \mathcal{X} nicht stochastisch unabhängig ist. Allerdings besitzen die Zeitreihen \mathcal{Z} und $\boldsymbol{\nu}$ die folgenden Eigenschaften.

Eigenschaften 4.6.

- (a) \mathcal{Z} ist eine zentrierte, stationäre, bzgl. $\boldsymbol{\varepsilon}$ kausale, geometrisch $L^4_{\mathcal{H}}$ - m -approximierbare Zeitreihe.
- (b) $\boldsymbol{\nu}$ ist ein bzgl. $\boldsymbol{\varepsilon}$ kausales, geometrisch $L^4_{\mathcal{H}}$ - m -approximierbares halb-starkes weißes Rauschen (siehe Definition 2.33).

Beweis.

(a) folgt unmittelbar aus Lemma 3.6 (b) und der Definition von \mathcal{Z} .

(b) ν ist per Definition stationär, bzgl. $\varepsilon = (\varepsilon_k)_k$ kausal und wegen $\mathbb{E}(\varepsilon_0^2) = 1$ zentriert. Ferner gilt mit $\nu_{k,m} := \mathcal{X}_{k,m}^2 - \sigma_{k,m}^2$ für alle k, m gemäß der Minkowski-Ungleichung

$$\nu_{4,\mathcal{H}}(\nu_m - \nu_{m,m}) \leq \nu_{4,\mathcal{H}}(\mathcal{X}_m^2 - \mathcal{X}_{m,m}^2) + \nu_{4,\mathcal{H}}(\sigma_m^2 - \sigma_{m,m}^2),$$

womit ν aufgrund von $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} \leq \|\cdot\|_{L^4[0,1]}$ und Lemma 3.6 (b) eine geometrisch $L^4_{\mathcal{H}}$ - m -approximierbare Zeitreihe ist. Des Weiteren ist ν ein halb-starkes weißes Rauschen, da für alle $h \in \mathcal{H}, s \in [0, 1]$ und $i, j \in \mathbb{Z}$ mit o.B.d.A. $i < j$ per Definition von ν_j und dem Satz von Fubini gilt

$$\mathbb{E}[\langle \nu_j, h \rangle_{\mathcal{H}} \nu_i(s)] = \int \mathbb{E}(\varepsilon_j^2(t) - 1) \mathbb{E}(\sigma_j^2(t) \nu_i(s)) y(t) dt = 0. \quad \square$$

Bemerkung 4.7. Die zentrierte Zeitreihe $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (\mathcal{X}_k^2 - m_2)_{k \in \mathbb{Z}}$ ist aufgrund der unbekannten Größe $m_2 = \mathbb{E}(\mathcal{X}_1^2)$ nicht beobachtbar. Allerdings kann die Zeitreihe $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ und damit auch $\mathcal{X}^2 = (\mathcal{X}_k^2)_{k \in \mathbb{Z}}$ beobachtet werden. Folglich lassen sich die Autokovarianzoperatoren $\mathcal{C}_h = \mathcal{C}_{h;\mathcal{Z}}$, die per Definition mit $\mathcal{C}_{h;\mathcal{X}^2}$ für alle h übereinstimmen, mittels der empirischen Autokovarianzoperatoren $\hat{\mathcal{C}}_h$ aus (4.6), basierend auf einer Stichprobe $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_N$, schätzen. Dabei folgt aus $L^4_{\mathcal{H}}$ - m -Approximierbarkeit von \mathcal{X}^2 nach Satz 4.4 sowohl (4.9) als auch (4.10). \blacklozenge

Wir werden sehen, dass die Injektivität von $\mathcal{C}_{0;\mathcal{Z}}$ eine bedeutende Rolle bei der Schätzung des Operators im FARCH(1)-Modell spielt. Für den Nachweis dieser Eigenschaft stellen wir die folgenden Annahmen auf.

Annahme 4.8. Es stehen δ und $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_{q^*}$ für die Parameter der \mathcal{H} -wertigen FGARCH(p, q^*)-Zeitreihe \mathcal{X} . Dann sagen wir, dass δ und $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_{q^*}$ die Annahme 4.8 erfüllen, falls $\delta \in \ell^\infty[0, 1]$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}, \ell^\infty[0,1]}$ für alle i und j sowie $\|\Gamma_{p,q^*}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} < 1$ mit $\Gamma_{p,q^*} := \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^{q^*} \beta_j$ gilt. \blacklozenge

Annahme 4.9. Wir sagen, dass die \mathcal{H} -wertige Zeitreihe $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ die Annahme 4.9 erfüllt, wenn es keinen abgeschlossenen, affinen Unterraum $U \subsetneq \mathcal{H}$ gibt, sodass gilt

$$\mathbb{P}(\varepsilon_0^2 \in U) = 1. \quad \blacklozenge$$

Bemerkung 4.10. Die Annahme 4.9 wird auch in der Arbeit [11] von Cerovecki, Francq, Hörmann und Zakoian zur Schätzung der Operatoren im FGARCH-Modell aufgestellt, und eine ähnliche Annahme ist bspw. in [41] von Turbillon, Marion und Pumo zur Schätzung des Operators einer \mathcal{H} -wertigen FMA(1)-Zeitreihe angegeben. \blacklozenge

Lemma 4.11. *Es sei \mathcal{X} eine \mathcal{H} -wertige FGARCH(p, q^*)-Zeitreihe, deren Parameter δ sowie $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_{q^*}$ die Annahme 4.8 und deren \mathcal{H} -wertige Zeitreihe $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ aus Innovationen (4.2) erfüllen. Erfüllt $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ zusätzlich die Annahme 4.9, gilt:*

(a) *Es gibt keinen abgeschlossenen Unterraum $V \subsetneq \mathcal{H}$ mit $\mathbb{P}(\mathcal{X}_0^2 \in V) = 1$.*

(b) *Es gibt keinen abgeschlossenen Unterraum $V \subsetneq \mathcal{H}$ mit $\mathbb{P}(\nu_0 \in V) = 1$.*

- (c) Es gibt keinen abgeschlossenen Unterraum $V \subsetneq \mathcal{H}$ mit $\mathbb{P}(\mathcal{Z}_0 \in V) = 1$.
- (d) Die Kovarianzoperatoren $\mathcal{C}_{0;\varepsilon^2}$, $\mathcal{C}_{0;\mathcal{X}^2}$, $\mathcal{C}_{0;\nu}$ und $\mathcal{C}_{0;\mathcal{Z}}$ sind injektiv, wobei $\varepsilon^2 := (\varepsilon_k^2)_{k \in \mathbb{Z}}$, $\mathcal{X}^2 := (\mathcal{X}_k^2)_{k \in \mathbb{Z}}$, $\nu := (\nu_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ und $\mathcal{Z} := (\mathcal{Z}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ gelten.

Beweis.

(a) Angenommen, es gilt $\mathbb{P}(\mathcal{X}_0^2 \in V) = 1$ für einen abgeschlossenen Unterraum $V \subsetneq \mathcal{H}$. Dann existiert ein $v \in \mathcal{H}$ mit $v \neq 0_{\mathcal{H}}$, wofür $\langle \mathcal{X}_0^2, v \rangle_{\mathcal{H}} = 0$ f.s. gilt, woraus wegen $\mathcal{X}_0^2 = \sigma_0^2 \odot \varepsilon_0^2$ f.s. per Definition von $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ wiederum $\mathbb{E} \langle \varepsilon_0^2, \sigma_0^2 \odot v \rangle_{\mathcal{H}}^2 = 0$ folgt, wobei $\sigma_0^2 \odot v \in \mathcal{H}$ f.s. wegen $\sigma_0^2 \in \ell^\infty[0, 1]$ f.s. nach Definition und der Annahme 4.8 gilt. Dabei gilt wegen stochastischer Unabhängigkeit von σ_0 und ε_0 , per Definition des Erwartungswertes, gemäß der Jensen'schen Ungleichung und dem Satz von Fubini mit $m_2 = \mathbb{E}(\sigma_0^2)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \langle \varepsilon_0^2, \sigma_0^2 \odot v \rangle_{\mathcal{H}}^2 &= \int \int \langle x, y \odot v \rangle_{\mathcal{H}}^2 d\mathbb{P}_{\sigma_0^2}(y) d\mathbb{P}_{\varepsilon_0^2}(x) \\ &\geq \int \left(\int x(t) \mathbb{E}(\sigma_0^2(t)) v(t) dt \right)^2 d\mathbb{P}_{\varepsilon_0^2}(x) = \mathbb{E} \langle \varepsilon_0^2, m_2 \odot v \rangle_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Demnach gilt $\langle \varepsilon_0^2, m_2 \odot h \rangle_{\mathcal{H}} = 0$ f.s. Des Weiteren gilt per Definition von σ_0^2 , wegen $\mathbb{E}(\sigma_k^2) = m_2 = \mathbb{E}(\mathcal{X}_l^2)$ für alle k und l , wegen $\Gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{q}^*} := \sum_{i=1}^{\mathbf{p}} \alpha_i + \sum_{j=1}^{\mathbf{q}^*} \beta_j \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}, \ell^\infty[0,1]} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ mit $\|\Gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{q}^*}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} < 1$ und aufgrund von Satz 2.7 mit $\Gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{q}^*}^0 := \mathbb{I}_{\mathcal{H}}$:

$$m_2 = \delta + \Gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{q}^*}(m_2) \iff [\mathbb{I}_{\mathcal{H}} - \Gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{q}^*}](m_2) = \delta \iff m_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{q}^*}^k(\delta).$$

Demzufolge gilt wegen $\Gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{q}^*}^k \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}, \ell^\infty[0,1]}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $\|\Gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{q}^*}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} < 1$, aufgrund von $\ell^\infty[0, 1] \subseteq \mathcal{H}$ und $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} \leq \|\cdot\|_\infty$:

$$\begin{aligned} \|m_2\|_\infty &\leq \|\delta\|_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} \|\Gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{q}^*}^k\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}, \ell^\infty[0,1]}} \|\delta\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \|\delta\|_\infty + \|\Gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{q}^*}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}, \ell^\infty[0,1]}} \|\delta\|_{\mathcal{H}} \sum_{k=0}^{\infty} \|\Gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{q}^*}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^k < \infty. \end{aligned}$$

Folglich gilt $m_2 \odot v \in \mathcal{H}$. Ferner gilt per Definition von σ_0^2 , da α_i, β_j für alle i, j von $\mathcal{H}_{\geq 0}$ nach $\mathcal{H}_{\geq 0}$ abbilden, wegen $\sigma_0^2 \geq_{\mathcal{H}} \delta$ f.s. (d.h. $\sigma_0^2(t) \geq \delta(t)$ für λ -f.a. $t \in [0, 1]$ f.s.) und wegen Eigenschaften 2.23 (e): $m_2 = \mathbb{E}(\sigma_0^2) \geq_{\mathcal{H}} \delta \in \mathcal{H}_{>0}$ und demzufolge $m_2 \odot v \neq 0_{\mathcal{H}}$. Damit impliziert $\mathbb{P}(\mathcal{X}_0^2 \in V) = 1$ für einen abgeschlossenen Unterraum $V \subsetneq \mathcal{H}$ wegen $m_2 \odot h \neq 0_{\mathcal{H}}$ sowie $m_2 \odot h \in \mathcal{H}$, dass ein Element u eines abgeschlossenen Unterrausms $U \subsetneq \mathcal{H}$ mit $u \neq 0_{\mathcal{H}}$ existiert, sodass $\langle \varepsilon_0^2, u \rangle_{\mathcal{H}} = 0$ f.s. bzw. äquivalent dazu $\mathbb{P}(\varepsilon_0^2 \in U) = 1$ gilt, womit die Behauptung bewiesen ist.

(b) Aus $\mathbb{P}(\nu_0 \in V) = 1$ für einen abgeschlossenen Unterraum $V \subsetneq \mathcal{H}$ folgt wegen $\nu_0 = \sigma_0^2 \odot (\varepsilon_0^2 - \mathbb{1})$ f.s. wie bei (a), dass es einen abgeschlossenen Unterraum $U \subsetneq \mathcal{H}$ mit $\varepsilon_0^2 - \mathbb{1} \in U$ f.s. gibt. Aufgrund von $\mathbb{E}(\varepsilon_0^2) = \mathbb{1}$ und Eigenschaften 2.23 (e) gilt demnach $\varepsilon_0^2 \in U$ f.s., womit die Behauptung verifiziert ist.

(c) folgt aus (a), $\mathcal{Z}_0 := \mathcal{X}_0^2 - m_2$ und Eigenschaften 2.23 (e).

(d) folgt aus (a) bis (c) und Definition und Eigenschaften 2.28 (c). \square

4.1.3 Schätzung von Eigenwerten und Eigenfunktionen

Neben dem Konsistenzresultat für die quadratischen Schätzfehler der Schätzer für die Autokovarianzoperatoren in Satz 4.4 benötigen wir auch Konsistenzresultat für die quadratischen Schätzfehler der Schätzer für die Eigenwerte und Eigenfunktionen von Kovarianzoperatoren im FARCH-Modell sowie von bestimmten selbstadjungierten, kompakten Operatoren im FGARCH-Modell. Da sowohl die Kovarianzoperatoren als auch die empirischen Kovarianzoperatoren selbstadjungiert und kompakt sind, stellen wir diese Aussagen für beliebige selbstadjungierte, kompakte Operatoren auf. Zuerst beschäftigen wir uns mit der Schätzung von Eigenwerten, wozu wir das folgende Lemma benötigen.

Lemma 4.12. *Für beliebige kompakte Operatoren $A, B \in \mathcal{K}_{\mathcal{H}}$ mit den Singulärwertzerlegungen $A = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\mathbf{a}_j \otimes \mathbf{a}'_j)$ bzw. $B = \sum_{j=1}^{\infty} b_j(\mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}'_j)$ gilt für alle $j \in \mathbb{N}$*

$$|a_j - b_j| \leq \|A - B\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}. \quad (4.18)$$

Beweis. Siehe [7], Lemma 4.2. □

Nachfolgend sei $\mathcal{K} \in \mathcal{K}_{\mathcal{H}}$ ein kompakter, selbstadjungierter, positiv semidefiniter Operator und $(\hat{\mathcal{K}}_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{K}_{\mathcal{H}}$ sei eine Folge von kompakten, selbstadjungierten, positiv semidefiniten Operatoren, die zur Schätzung von \mathcal{K} dienen, wobei jedes $\hat{\mathcal{K}}_N$ auf einer Stichprobe X_1, \dots, X_N einer stationären Zeitreihe $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ basiert. Ferner seien $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ bzw. $(\hat{k}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ die o.B.d.A. monoton fallenden Eigenwertfolgen von $\mathcal{K} \in \mathcal{K}_{\mathcal{H}}$ bzw. $\hat{\mathcal{K}}_N \in \mathcal{K}_{\mathcal{H}}$ mit den zugehörigen Eigenfunktionenfolgen $(\mathbf{k}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ bzw. $(\hat{\mathbf{k}}_j)_{j \in \mathbb{N}}$.

Korollar 4.13. Es sei $(a_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge mit $a_N = \Xi[N^{-1}, 1]$ und $(b_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ sei eine Folge mit $b_N = \Omega(1)$.

(a) Im Fall $\mathbb{E} \|\hat{\mathcal{K}}_N - \mathcal{K}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^2 = O(a_N)$ gilt

$$\mathbb{E} \left[\sup_{j \in \mathbb{N}} (\hat{k}_j - k_j)^2 \right] = O(a_N) \quad (4.19)$$

und falls $\|\hat{\mathcal{K}}_N - \mathcal{K}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(a_N)$ gilt, erhalten wir wenigstens

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} (\hat{k}_j - k_j)^2 = O_{\mathbb{P}}(a_N). \quad (4.20)$$

(b) Gelte sowohl $\|\hat{\mathcal{K}}_N - \mathcal{K}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(a_N)$ als auch $k_{b_N} = \Xi[\sqrt{a_N}, 1]$, so gilt

$$\hat{k}_{b_N} = O_{\mathbb{P}}(k_{b_N}) \quad \text{und} \quad k_{b_N} = O_{\mathbb{P}}(\hat{k}_{b_N}). \quad (4.21)$$

Beweis. Folgt aus elementaren Umformungen und den Voraussetzungen. □

Nun leiten wir Schätzer für Eigenfunktionen her. Hierzu illustrieren wir die Schätzung einer j -ten Eigenfunktion \mathbf{k}_j eines selbstadjungierten, kompakten Operators bei vorliegenden Schätzern $\hat{\mathbf{k}}_{j,1}, \hat{\mathbf{k}}_{j,2}$ und $\hat{\mathbf{k}}_{j,3}$.

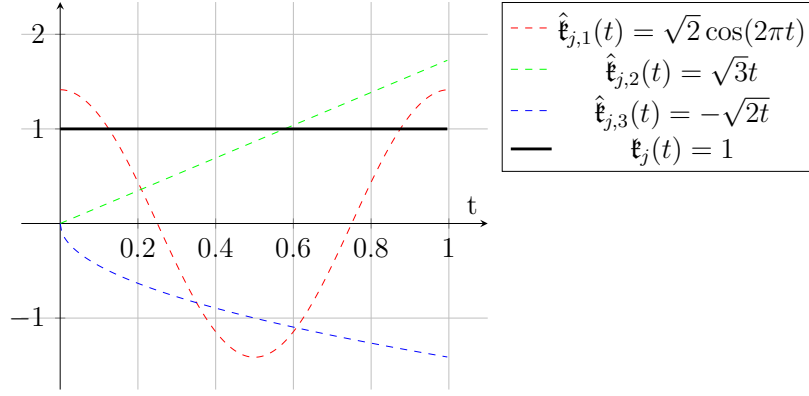


Abbildung 4.1: Schätzung der j -ten Eigenfunktion \mathfrak{k}_j mittels $\hat{\mathfrak{k}}_{j,1}$, $\hat{\mathfrak{k}}_{j,2}$ und $\hat{\mathfrak{k}}_{j,3}$.

Anhand dieser Grafik wird deutlich, dass ein Schätzer $\hat{\mathfrak{k}}_j$ für \mathfrak{k}_j so anzupassen ist, dass der Abstand von $\hat{\mathfrak{k}}_j$ bzw. $-\hat{\mathfrak{k}}_j$ zu \mathfrak{k}_j minimal ist und dass im Fall $\hat{\mathfrak{k}}_j \perp \mathfrak{k}_j$ keine eindeutige Entscheidung getroffen werden kann. Gelte nun $\hat{\mathfrak{k}}_j \not\perp \mathfrak{k}_j$ f.s., so können wir aufgrund von $\|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|_{\mathcal{H}}^2 = 2(1 - \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle_{\mathcal{H}})$ für normierte Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathcal{H}$ für alle j und N

$$\operatorname{argmin}_{\tilde{\mathfrak{k}}_j = \pm \hat{\mathfrak{k}}_j} \|\tilde{\mathfrak{k}}_j - \mathfrak{k}_j\|_{\mathcal{H}}^2 = \operatorname{argmax}_{\tilde{\mathfrak{k}}_j = \pm \hat{\mathfrak{k}}_j} \langle \tilde{\mathfrak{k}}_j, \mathfrak{k}_j \rangle_{\mathcal{H}} = \operatorname{sgn}(\langle \hat{\mathfrak{k}}_j, \mathfrak{k}_j \rangle_{\mathcal{H}}) \hat{\mathfrak{k}}_j =: \hat{\mathfrak{k}}'_j \quad (4.22)$$

als Schätzer für \mathfrak{k}_j ansetzen, wobei sgn die Signumfunktion sei. Aus den Schätzern in Abbildung 4.2 resultieren die folgenden Schätzer für die Eigenfunktion \mathfrak{k}_j :

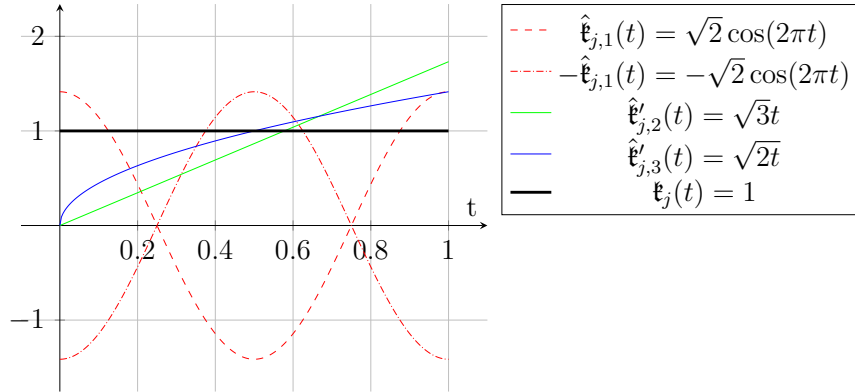


Abbildung 4.2: Mögliche Schätzer $\hat{\mathfrak{k}}_{j,1}$ und $-\hat{\mathfrak{k}}_{j,1}$ (wegen $\hat{\mathfrak{k}}_{j,1} \perp \mathfrak{k}_j$), sowie modifizierte Schätzer $\hat{\mathfrak{k}}'_{j,2}$ und $\hat{\mathfrak{k}}'_{j,3}$ für \mathfrak{k}_j , basierend auf den Schätzern in Abbildung 4.1.

Um $\hat{\mathfrak{k}}_j \not\perp \mathfrak{k}_j$ f.s. für alle j, N zu gewährleisten, modifizieren wir die ursprünglichen Schätzer $\hat{\mathfrak{k}}_j$ auf die folgende Weise.

Definition und Eigenschaften 4.14. Es sei $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine ONB von \mathcal{H} , und $(\zeta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge reellwertiger, stochastisch unabhängig und identisch $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilter Zufallsvariablen, welche stochastisch unabhängig von der Stichprobe X_1, \dots, X_N von \mathbf{X} mit $N \in \mathbb{N}$ sei. Dann ist der Schätzer

$$\hat{\mathfrak{k}}''_j := \hat{\mathfrak{k}}_j + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\zeta_i h_i}{i^2 N} \quad (4.23)$$

für \mathfrak{k}_j mit $j, N \in \mathbb{N}$ wohldefiniert und für alle $j, N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\hat{\mathfrak{k}}_j'' \not\perp \mathfrak{k}_j \quad \text{f.s.} \quad (4.24)$$

Beweis. Aus elementaren Umformungen und dem Satz von Beppo Levi folgt $\mathbb{E} \|\hat{\mathfrak{k}}_j''\|_{\mathcal{H}} < \infty$ für alle j und N , woraus wiederum $\|\hat{\mathfrak{k}}_j''\|_{\mathcal{H}} < \infty$ f.s. bzw. $\hat{\mathfrak{k}}_j'' \in \mathcal{H}$ f.s. folgt und $\hat{\mathfrak{k}}_j''$ somit wohldefiniert ist. Für alle j, N gilt außerdem

$$\langle \hat{\mathfrak{k}}_j'', \mathfrak{k}_j \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \hat{\mathfrak{k}}_j, \mathfrak{k}_j \rangle_{\mathcal{H}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\zeta_i \langle h_i, \mathfrak{k}_j \rangle_{\mathcal{H}}}{i^2 N} \neq 0 \quad \text{f.s.},$$

da die Zufallsvariable $\langle \hat{\mathfrak{k}}_j'', \mathfrak{k}_j \rangle_{\mathcal{H}}$ als Summe der stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen $\langle \hat{\mathfrak{k}}_j, \mathfrak{k}_j \rangle_{\mathcal{H}}$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\zeta_i \langle h_i, \mathfrak{k}_j \rangle_{\mathcal{H}}}{i^2 N} \sim \mathcal{N}(0, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle h_i, \mathfrak{k}_j \rangle_{\mathcal{H}}^2}{i^4 N^2})$ für alle j, N mit $h_i \not\perp \mathfrak{k}_j$ für ein i , eine absolutstetige Verteilung hat. \square

Auf Basis der Schätzer in (4.23) definieren wir die finale Version der Schätzer für die Eigenfunktionen für alle j und N durch

$$\hat{\mathfrak{k}}_j''' := \left[\mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(\text{sgn}(\langle \hat{\mathfrak{k}}_j'', \mathfrak{k}_j \rangle_{\mathcal{H}'})) \text{sgn}(\langle \hat{\mathfrak{k}}_j'', \mathfrak{k}_j \rangle_{\mathcal{H}'}) + \mathbf{1}_{\{0\}}(\text{sgn}(\langle \hat{\mathfrak{k}}_j'', \mathfrak{k}_j \rangle_{\mathcal{H}'})) \right] \hat{\mathfrak{k}}_j, \quad (4.25)$$

für die wegen (4.24) gilt:

$$\hat{\mathfrak{k}}_j''' = \text{sgn}(\langle \hat{\mathfrak{k}}_j'', \mathfrak{k}_j \rangle_{\mathcal{H}'}) \hat{\mathfrak{k}}_j \quad \text{f.s.} \quad (4.26)$$

Bemerkung 4.15. Nach dem Spektralsatz ist $(\hat{\mathfrak{k}}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ f.s. eine ONB von \mathcal{H} und wegen $\hat{\mathfrak{k}}_j''' = \text{sgn}(\langle \hat{\mathfrak{k}}_j'', \mathfrak{k}_j \rangle_{\mathcal{H}'}) \hat{\mathfrak{k}}_j$ f.s. ist somit auch $(\hat{\mathfrak{k}}_j''')_{j \in \mathbb{N}}$ f.s. eine ONB von \mathcal{H} . \blacklozenge

Für die Schätzung der Eigenfunktionen benötigen wir auch die Größen

$$\gamma_j = \gamma(k_j) := (k_j - k_{j+1})^{-1} \quad (4.27)$$

mit $j \in \mathbb{N}$, die nur für eindimensionale Eigenräume der Eigenwerte k_j wohldefiniert sind. Falls der Eigenraum eines Eigenwerts eindimensional ist, erhalten wir die folgende obere Schranke für die Schätzfehler der Schätzer für die zugehörigen Eigenfunktionen.

Lemma 4.16. *Falls der Eigenraum von k_j mit $j \in \mathbb{N}$ eindimensional ist, gilt*

$$\|\hat{\mathfrak{k}}_j' - \mathfrak{k}_j\|_{\mathcal{H}} \leq \tilde{\gamma}_j \|\hat{\mathcal{K}}_N - \mathcal{K}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} \quad (4.28)$$

für alle $N \in \mathbb{N}$, wobei $\tilde{\gamma}_j$ definiert ist durch

$$\tilde{\gamma}_j := 2\sqrt{2} \begin{cases} \gamma_1, & j = 1, \\ \max(\gamma_{j-1}, \gamma_j), & j > 1. \end{cases} \quad (4.29)$$

Beweis. In [7], Lemma 4.3 wurde die Behauptung ausschließlich für den Fall gezeigt, dass \mathcal{K} ein Kovarianzoperator und $(\hat{\mathcal{K}}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ die Folge der empirischen Kovarianzoperatoren sind. Dieser Nachweis ist jedoch allgemeingültig, da ausschließlich verwendet wurde, dass die vorliegenden Operatoren selbstadjungiert sind. \square

Bemerkung 4.17. In [7], Lemma 4.4 gibt es auch eine Aussage für endliche, mehrdimensionale Eigenräume, womit die Schätzung von Eigenfunktionen nur bei unendlichdimensionalen Eigenräumen problematisch ist. Da aber vorausgesetzt wurde, dass \mathcal{K} ein selbstadjungierter, kompakter Operator ist, kann nur der Eigenwert 0 einen unendlichdimensionalen Eigenraum besitzen. Dies ist nach dem Spektralsatz für selbstadjungierte, kompakte Operatoren jedoch nur möglich, wenn \mathcal{K} nicht injektiv ist. \blacklozenge

Für die Schätzung der Eigenfunktionen treffen wir die folgende Annahme.

Annahme 4.18. Wir sagen, dass ein Operator \mathcal{K} die Annahme 4.18 erfüllt, falls gilt:

- (a) \mathcal{K} ist injektiv,
- (b) $k_j \neq k_{j+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}$
- (c) und es existiert eine konvexe Funktion $\kappa: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\kappa(j) = k_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. \blacklozenge

Bemerkung 4.19.

- (a) Für den selbstadjungierten, positiv semidefiniten Operator \mathcal{K} gilt nach (a) und (b) der Annahme 4.18:

$$k_1 > k_2 > \dots > 0. \quad (4.30)$$

- (b) Aus $\gamma_N = (k_N - k_{N+1})^{-1} \asymp k_N^{-1}$, Annahme 4.18 (c) und der Definition von $\tilde{\gamma}_j$ in (4.29) für alle $j \in \mathbb{N}$ folgt für jede Folge $(m_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $m = m_N = \Omega(1)$

$$\sup_{j \leq m} \tilde{\gamma}_j = \gamma_m \asymp k_m^{-1}, \quad (4.31)$$

wobei dieser Ausdruck wegen (4.30) wohldefiniert ist. \blacklozenge

Insgesamt führen die obigen Überlegungen zu folgendem Resultat für die vorläufigen Schätzer der Eigenfunktionen (siehe [7], Theorem 4.5 und Korollar 4.3).

Korollar 4.20. \mathcal{K} erfülle die Annahme 4.18. Für die Eigenwerte von \mathcal{K} gelte $k_m = \omega(\sqrt{a_N})$, wobei $(m_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ eine Folge mit $m = m_N = \Xi[1, N)$ und $(a_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge mit $a_N = \Xi[N^{-1}, 1)$ sei.

- (a) Es gelte $\mathbb{E} \|\hat{\mathcal{K}}_N - \mathcal{K}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^2 = O(a_N)$. Dann gilt sowohl

$$\mathbb{E} \|\hat{\mathfrak{k}}'_j - \mathfrak{k}_j\|_{\mathcal{H}}^2 = O(a_N) \quad (4.32)$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ als auch

$$\mathbb{E} \left(\sup_{j \leq m} \|\hat{\mathfrak{k}}'_j - \mathfrak{k}_j\|_{\mathcal{H}}^2 \right) = O(k_m^{-2} a_N). \quad (4.33)$$

- (b) Nun gelte $\|\hat{\mathcal{K}}_N - \mathcal{K}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(a_N)$. Dann gilt sowohl

$$\|\hat{\mathfrak{k}}'_j - \mathfrak{k}_j\|_{\mathcal{H}}^2 = O_{\mathbb{P}}(a_N) \quad (4.34)$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ als auch

$$\sup_{j \leq m} \|\hat{\mathfrak{t}}'_j - \mathfrak{t}_j\|_{\mathcal{H}}^2 = O_{\mathbb{P}}(k_m^{-2} a_N). \quad (4.35)$$

Beweis. Aus (a) und (b) der Annahme 4.18, (4.28) sowie $\mathbb{E} \|\hat{\mathcal{K}}_N - \mathcal{K}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^2 = O(a_N)$ bzw. $\|\hat{\mathcal{K}}_N - \mathcal{K}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}'}}^2 = O_{\mathbb{P}}(a_N)$ folgt sofort (4.32) bzw. (4.34) für alle $j \in \mathbb{N}$ und (4.33) bzw. (4.35), wenn zusätzlich Annahme 4.18 (c) genutzt wird. \square

Die Raten in Korollar 4.20 stimmen nach dem folgenden Lemma mit den Raten der quadratischen Schätzfehler des Schätzers für die Eigenfunktion \mathfrak{t}_j mittels $\hat{\mathfrak{t}}_j'''$ aus (4.25) mit $j \in \mathbb{N}$ überein.

Lemma 4.21. *Es gelten die Voraussetzungen von Korollar 4.20.*

(a) *Im Fall $\mathbb{E} \|\hat{\mathcal{K}}_N - \mathcal{K}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^2 = O(a_N)$ gilt auch hier sowohl*

$$\mathbb{E} \|\hat{\mathfrak{t}}_j''' - \mathfrak{t}_j\|_{\mathcal{H}}^2 = O(a_N) \quad (4.36)$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ als auch

$$\mathbb{E} \left(\sup_{j \leq m} \|\hat{\mathfrak{t}}_j''' - \mathfrak{t}_j\|_{\mathcal{H}}^2 \right) = O(k_m^{-2} a_N). \quad (4.37)$$

(b) *Gelte nun $\|\hat{\mathcal{K}}_N - \mathcal{K}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(a_N)$, so erhalten wir sowohl*

$$\|\hat{\mathfrak{t}}_j''' - \mathfrak{t}_j\|_{\mathcal{H}}^2 = O_{\mathbb{P}}(a_N) \quad (4.38)$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ als auch

$$\sup_{j \leq m} \|\hat{\mathfrak{t}}_j''' - \mathfrak{t}_j\|_{\mathcal{H}}^2 = O_{\mathbb{P}}(k_m^{-2} a_N). \quad (4.39)$$

Beweis.

(a) Nach Definition von $\hat{\mathfrak{t}}'_j$ sowie $\hat{\mathfrak{t}}_j'''$ für alle j, N , und wegen (4.26) und (4.32) gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|\hat{\mathfrak{t}}_j''' - \mathfrak{t}_j\|_{\mathcal{H}}^2 &\lesssim \mathbb{E} \|\hat{\mathfrak{t}}'_j - \mathfrak{t}_j\|_{\mathcal{H}}^2 + \mathbb{E} \left(\left[\text{sgn}(\langle \hat{\mathfrak{t}}'_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}}) - \text{sgn}(\langle \hat{\mathfrak{t}}_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}}) \right]^2 \right) \\ &= O(a_N) + 2 \left[1 + \mathbb{P}(\langle \hat{\mathfrak{t}}'_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}} \langle \hat{\mathfrak{t}}_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}} < 0) - \mathbb{P}(\langle \hat{\mathfrak{t}}'_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}} \langle \hat{\mathfrak{t}}_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}} > 0) \right] \\ &\leq O(a_N) + 2 \mathbb{P}(\langle \hat{\mathfrak{t}}'_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}} \langle \hat{\mathfrak{t}}_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Ferner gilt per Definition der Schätzer $\hat{\mathfrak{t}}_j''$ aus (4.23), wegen $\langle \hat{\mathfrak{t}}_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}}^2 = \langle \hat{\mathfrak{t}}'_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}}^2$ und wegen $\|\hat{\mathfrak{t}}'_j - \mathfrak{t}_j\|_{\mathcal{H}}^2 = 2(1 - \langle \hat{\mathfrak{t}}'_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}})$ für alle j, N :

$$\langle \hat{\mathfrak{t}}_j'', \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}} \langle \hat{\mathfrak{t}}_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}} = 1 - \|\hat{\mathfrak{t}}'_j - \mathfrak{t}_j\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{4} \|\hat{\mathfrak{t}}'_j - \mathfrak{t}_j\|_{\mathcal{H}}^4 + \langle \hat{\mathfrak{t}}_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\zeta_i \langle h_i, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}}}{i^2 N}, \quad (4.41)$$

wobei für den letzten Summanden wegen stochastischer Unabhängigkeit der vorliegenden Zufallsvariablen, $\mathbb{E} |\langle \hat{\mathfrak{t}}_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}}| \leq 1$ für alle j , dem Satz von Beppo Levi und $\zeta_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ für alle i gilt:

$$\mathbb{E} \left[|\langle \hat{\mathfrak{t}}_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}}| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\zeta_i \langle h_i, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}}|}{i^2 N} \right] = \mathbb{E} (|\langle \hat{\mathfrak{t}}_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}}|) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E} |\zeta_i|}{i^2 N} = O(N^{-1}). \quad (4.42)$$

Aus (4.41) und $\mathbb{E} \|\hat{\mathfrak{t}}'_j - \mathfrak{t}_j\|_{\mathcal{H}}^2 = O(a_N)$ mit $a_N = \Xi[N^{-1}, 1)$ gemäß Korollar 4.20 folgt dann

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[1 - \langle \hat{\mathfrak{t}}''_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}} \langle \hat{\mathfrak{t}}_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}} \right] &\leq \mathbb{E} \|\hat{\mathfrak{t}}'_j - \mathfrak{t}_j\|_{\mathcal{H}}^2 + \mathbb{E} \left[|\langle \hat{\mathfrak{t}}_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}}| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\zeta_i \langle h_i, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}}|}{i^2 N} \right] \\ &= O(a_N) + O(N^{-1}) = O(a_N), \end{aligned}$$

woraus wiederum nach Lemma 2.21 (a)

$$\mathbb{P} \left(\langle \hat{\mathfrak{t}}''_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}} \langle \hat{\mathfrak{t}}_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0 \right) \leq \mathbb{P} \left(1 - \langle \hat{\mathfrak{t}}''_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}} \langle \hat{\mathfrak{t}}_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}} > 1/2 \right) = O(a_N)$$

folgt und (4.36) somit wegen (4.40) verifiziert ist.

Mit gleichen Überlegungen, (4.42) und (4.35) mit $k_m = \omega(\sqrt{a_N})$ für eine Folge $(m_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $m = m_N = \Xi[1, N)$, sowie aus $a_N = \Xi[N^{-1}, 1)$ folgt weiterhin:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{j \leq m} \left(1 - \langle \hat{\mathfrak{t}}''_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}} \langle \hat{\mathfrak{t}}_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}} \right) \right] &\leq \mathbb{E} \left(\sup_{j \leq m} \|\hat{\mathfrak{t}}'_j - \mathfrak{t}_j\|_{\mathcal{H}}^2 \right) + \mathbb{E} \left[\sup_{j \leq m} |\langle \hat{\mathfrak{t}}_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}}| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\zeta_i \langle h_i, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}}|}{i^2 N} \right] \\ &= O(k_m^{-2} a_N) + O(N^{-1}) = O(k_m^{-2} a_N). \end{aligned}$$

Nach den genannten Umformungen und Lemma 2.21 (a) gilt folglich wie behauptet:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{j \leq m} \|\hat{\mathfrak{t}}'''_j - \mathfrak{t}_j\|_{\mathcal{H}}^2 \right) &\lesssim \mathbb{E} \left(\sup_{j \leq m} \|\hat{\mathfrak{t}}'_j - \mathfrak{t}_j\|_{\mathcal{H}}^2 \right) + 2 \mathbb{P} \left(\sup_{j \leq m} \left[1 - \langle \hat{\mathfrak{t}}''_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}} \langle \hat{\mathfrak{t}}_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}} \right] > 1/2 \right) \\ &\leq O_{\mathbb{P}}(k_m^{-2} a_N) + O_{\mathbb{P}}(k_m^{-2} a_N) = O_{\mathbb{P}}(k_m^{-2} a_N). \end{aligned}$$

(b) Für den Beweis dieses Teils benötigen wir, dass für jede Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von reellwertigen Zufallsvariablen mit $X_n = o_{\mathbb{P}}(1)$ für jede Nullfolge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

$$1 - \operatorname{sgn}(1 - X_n) = o_{\mathbb{P}}(b_n). \quad (4.43)$$

Für jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt aufgrund von (4.41), (4.34), (4.42), sowie $a_N = o_{\mathbb{P}}(1)$:

$$\langle \hat{\mathfrak{t}}''_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}} \langle \hat{\mathfrak{t}}_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}} = 1 + O_{\mathbb{P}}(a_N) + O_{\mathbb{P}}(a_N^2) + O_{\mathbb{P}}(N^{-1}) = 1 + o_{\mathbb{P}}(1),$$

womit wegen (4.43), (4.34), sowie der Umformungen in (a), wie behauptet, gilt:

$$\|\hat{\mathfrak{t}}'''_j - \mathfrak{t}_j\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\hat{\mathfrak{t}}'_j - \mathfrak{t}_j\|_{\mathcal{H}}^2 + 2 \left[1 - \operatorname{sgn}(\langle \hat{\mathfrak{t}}''_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}} \langle \hat{\mathfrak{t}}_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}}) \right] = O_{\mathbb{P}}(a_N). \quad (4.44)$$

Des Weiteren implizieren (4.41), (4.35), (4.42) sowie $k_m^{-2} a_N = o_{\mathbb{P}}(1)$:

$$\sup_{j \leq m} \langle \hat{\mathfrak{t}}''_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}} \langle \hat{\mathfrak{t}}_j, \mathfrak{t}_j \rangle_{\mathcal{H}} = 1 + O_{\mathbb{P}}(k_m^{-2} a_N) + O_{\mathbb{P}}(k_m^{-4} a_N^2) + O_{\mathbb{P}}(N^{-1}) = 1 + o_{\mathbb{P}}(1),$$

womit wegen (4.43), (4.44) und (4.35) gilt:

$$\sup_{j \leq m} \|\hat{\mathfrak{t}}'''_j - \mathfrak{t}_j\|_{\mathcal{H}}^2 = O_{\mathbb{P}}(k_m^{-2} a_N). \quad \square$$

4.1.4 Identifizierbarkeit

Bei der Schätzung der Operatoren im FARCH- und im FGARCH-Modell liegen Gleichungen $A = BC$ bestehend aus Operatoren A, B und C vor, wobei für A sowie C konsistente

Schätzer bekannt sind und B der zu schätzende Operator ist. Die Schätzung von B ergibt aber nur Sinn, wenn sich B aus dieser Gleichung heraus identifizieren lässt, d.h.

$$BC = \tilde{B}C \implies B = \tilde{B}, \quad (4.45)$$

wobei \tilde{B} ebenso ein Operator ist. Der folgende Satz liefert eine Charakterisierung für die Identifizierbarkeit beschränkter Operatoren in (4.45).

Satz 4.22. *Eine Lösung $B \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}', \mathcal{H}''}$ der Gleichung $A = BC$ mit $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$ und $C \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$ ist genau dann eindeutig, wenn das Bild von C dicht in \mathcal{H}' liegt.*

Beweis. Für alle $B, \tilde{B} \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}', \mathcal{H}''}$ und $C \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$ gilt wegen Stetigkeit von B sowie \tilde{B} :

$$BC = \tilde{B}C \iff (B - \tilde{B})|_{\text{Bild}(C)} = 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}', \mathcal{H}''}} \iff (B - \tilde{B})|_{\overline{\text{Bild}(C)}} = 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}', \mathcal{H}''}}. \quad \square$$

4.1.5 Tichonow-Regularisierung

Da die Gleichung $A = BC$ zur Schätzung der Operatoren im FARCH- und im FGARCH-Modell bei bekanntem Schätzer für A sowie C und zu schätzendem Operator B aus kompakten Operatoren besteht, tritt neben dem Problem der Identifizierbarkeit von B ein weiteres Problem auf. Und zwar ist C als kompakter Operator gemäß Definition und Eigenschaften 2.9 (e) nicht notwendigerweise invertierbar, wodurch sich B nicht aus der Gleichung $A = BC$ isolieren lässt. Diesem *schlecht gestellten Problem* begegnen wir in Anlehnung an Tichonow und Arsenin [40] mit Multiplikation einer *Tichonow-Regularisierten* von C von rechts an BC (in [40] sind auch weitere Methoden für den Umgang mit schlecht gestellten Problemen beschrieben).

Definition und Satz 4.23. *Es sei $A \in \mathcal{K}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$ und es gelte $\varphi > 0$. Dann handelt es sich bei $AA^* + \varphi \mathbb{I}_{\mathcal{H}'}: \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}'$ um einen beschränkten, selbstadjungierten, positiv definiten, invertierbaren Operator. Dabei ist $(AA^* + \varphi \mathbb{I}_{\mathcal{H}'})^{-1}: \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}'$ ein beschränkter, selbstadjungierter Operator. Die Tichonow-Regularisierte von A definieren wir durch*

$$A^\dagger = A^\dagger(\varphi) := A^*(AA^* + \varphi \mathbb{I}_{\mathcal{H}'})^{-1} \quad (4.46)$$

und wir schreiben $A^\ddagger := AA^\dagger$.

Beweis. Es sei $\varphi > 0$ und $AA^* + \varphi \mathbb{I}_{\mathcal{H}'}$ sei ein beschränkter, selbstadjungierter, pos. definiten Operator. Für jedes $y' \in \mathcal{H}'$ gilt $y' = (AA^* + \varphi \mathbb{I}_{\mathcal{H}'})(x')$ mit $x' = \sum_{j=1}^{\infty} (a'_j + \varphi)^{-1} \langle y', \mathbf{a}'_j \rangle_{\mathcal{H}'} \mathbf{a}'_j$, wobei $(\mathbf{a}'_j)_{j \in \mathbb{N}}$ die Eigenfunktionenfolge sowie $(a'_j)_{j \in \mathbb{N}}$ die zugehörige Eigenwertfolge von AA^* sei und wegen $|(\mathbf{a}'_j + \varphi)^{-1} \langle y', \mathbf{a}'_j \rangle_{\mathcal{H}'}| \leq \varphi^{-1} |\langle y', \mathbf{a}'_j \rangle_{\mathcal{H}'}|$ für alle j , gilt $x' \in \mathcal{H}'$. Damit ist $AA^* + \varphi \mathbb{I}_{\mathcal{H}'}$ ein surjektiver, pos. definiten Operator und demzufolge invertierbar. Ferner ist $(AA^* + \varphi \mathbb{I}_{\mathcal{H}'})^{-1}$ nach Definition und Eigenschaften 2.6 (d) ein beschränkter Operator und $(AA^* + \varphi \mathbb{I}_{\mathcal{H}'})^{-1}$ ist selbstadjungiert, da $AA^* + \varphi \mathbb{I}_{\mathcal{H}'}$ selbstadjungiert ist. \square

4.1.6 Glattheit von Operatoren

Unter anderem bei der Schätzung der Operatoren (statt von Projektionen der Operatoren auf einen endlichdimensionalen Unterraum) im FARCH- und im FGARCH-Modell

werden wir aus beweistechnischen Gründen fordern, dass die zu schätzenden Operatoren hinreichend *glatt* sind, d.h. sie erfüllen die folgende Sobolev-Bedingung.

Annahme 4.24. Es sei $S \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$, und $(\phi_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ sei eine ONB von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$. Dann sagen wir, dass das Tupel $(S, (\phi_{ij})_{i,j})$ die Annahme 4.24 für $\beta > 0$ erfüllt, falls gilt:

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \langle S, \phi_{ij} \rangle_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}}^2 (1 + i^{2\beta} + j^{2\beta}) < \infty. \quad \blacklozenge$$

Erfüllt ein Tupel $(S, (\phi_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}})$ mit $S \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$ und ONB $(\phi_{ij})_{i,j}$ von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$ die Annahme 4.24 für $\beta > 0$, so gilt wegen $\prod_{\mathcal{J}_m^c} S = \sum_{i,j>m}^{\infty} \langle S, \phi_{ij} \rangle_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}} \phi_{ij}$ mit $\mathcal{J}_m^c := \{\phi_{ij} \mid i, j > m\}$ für jede Folge $(m_N)_{N \in \mathbb{N}}$ mit $m = m_N \rightarrow \infty$ nach dem Satz von Pythagoras:

$$\left\| \prod_{\mathcal{J}_m^c} S \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}}^2 \leq (1 + m^{2\beta})^{-1} \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle S, \phi_{ij} \rangle_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}}^2 (1 + i^{2\beta} + j^{2\beta}) = O(m^{-2\beta}). \quad (4.47)$$

Für die Schätzung der Operatoren im FARCH- und im FGARCH-Modell, ohne sie auf einen endlichdimensionalen Unterraum zu projizieren, ist diese Identität von großer Bedeutung. Es stellt sich die Frage, ob es überhaupt Operatoren aus $\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$ gibt, die die Annahme 4.24 bei vorliegender ONB von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$ erfüllen. Angenommen, solche Operatoren existieren, stellt sich außerdem die Frage, ob es Operatoren gibt, die die Annahme 4.24 für ein $\beta' > 0$, jedoch nicht für ein β'' mit $\beta'' > \beta'$, erfüllen und ob es Elemente von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$ gibt, die diese Annahme für kein $\beta > 0$ erfüllen. Diese Fragen beantworten wir für den Fall einer durch ONBs von \mathcal{H} und \mathcal{H}' induzierten ONB von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$.

Beispiele 4.25. Es sei $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine ONB von \mathcal{H} , $(h'_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sei eine ONB von \mathcal{H}' und $(\phi_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ sei eine ONB von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$ mit $\phi_{ij} := h_i \otimes h'_j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$.

- (a) Es gelte $S_1 := \sum_{l=1}^n a_l \phi_{ll}$ mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Per Definition ist S_1 Element von $\mathcal{F}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$ und wegen $\phi_{ij}(h_k) = \delta_{ik}$ für alle $i, j, k \in N$ gilt für jedes $\beta > 0$:

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \langle S_1, \phi_{ij} \rangle_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}}^2 (1 + i^{2\beta} + j^{2\beta}) = \sum_{k=1}^n a_k^2 (1 + 2k^{2\beta}) < \infty.$$

- (b) Nun betrachten wir den Operator $S_2 := \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{\phi_{ij}}{(1+i^2)(1+j^2)}$, der per Definition Element von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'} \setminus \mathcal{F}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$ ist. Für diesen Operator gilt für jedes $\beta > 0$:

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \langle S_2, \phi_{ij} \rangle_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}}^2 (1 + i^{2\beta} + j^{2\beta}) \leq 2 \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{i^{2\beta-4}}{j^4} + \frac{j^{4-2\beta}}{i^4} \right),$$

womit $(S_2, (\phi_{ij})_{i,j})$ die Annahme 4.24 ausschließlich für alle $\beta < 3/2$ erfüllt.

- (c) Aus den Überlegungen in (b) folgt, dass $S_3 := \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{\phi_{ij}}{(1+i \ln^2(i))(1+j \ln^2(j))}$ Element von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}$ ist, aber dass $(S_3, (\phi_{ij})_{i,j})$ die Annahme 4.24 für kein $\beta > 0$ erfüllt. \blacklozenge

4.2 Schätzung von δ

Basierend auf Ideen zur Herleitung des Schätzers für δ von \mathcal{H} -wertigen FARCH(1)-Zeitreihen in [22] von Hörmann, Horváth und Reeder geben wir hier einen Schätzer

für δ einer \mathcal{H} -wertigen FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)-Zeitreihe $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ an. Wegen (4.16) und $\nu_k := \mathcal{X}_k^2 - \sigma_k^2$ für alle k gilt zunächst

$$\delta = \sigma_k^2 - \sum_{i=1}^{\mathbf{r}^*} (\alpha_i + \beta_i)(\mathcal{X}_{k-i}^2) + \sum_{j=1}^{\mathbf{q}^*} \beta_j(\nu_{k-j})$$

f.s. für alle k mit $\mathbf{p} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q}^* \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{r}^* := \max(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)$ und $\alpha_i = \beta_0 = \beta_j = 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}$ für alle $i > \mathbf{p}$ sowie $j > \mathbf{q}^*$. Die Bildung des Erwartungswertes auf beiden Seiten führt wegen $\mathbb{E}(\sigma_k^2(t)) = \mathbb{E}(\mathcal{X}_k^2(t))$ für alle k und λ -f.a. $t \in [0, 1]$, Stationarität der Zeitreihen $(\sigma_k^2)_k$, $(\mathcal{X}_k^2)_k$ sowie $(\nu_k)_k$ und Eigenschaften 2.23 (e) mit $m_2 := \mathbb{E}(\mathcal{X}_0^2)$ zu

$$\delta = m_2 - \sum_{i=1}^{\mathbf{r}^*} (\alpha_i + \beta_i)(m_2). \quad (4.48)$$

Als Schätzer für δ eignet sich demzufolge

$$\hat{\delta} := \hat{m}_2 - \sum_{i=1}^{\mathbf{r}^*} (\hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i)(\hat{m}_2), \quad (4.49)$$

wobei $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_{\mathbf{p}}$ bzw. $\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_{\mathbf{q}^*}$ auf einer Stichprobe $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_N$ basierende Schätzer für die Operatoren $\alpha_1, \dots, \alpha_{\mathbf{p}}$ bzw. $\beta_0, \dots, \beta_{\mathbf{q}^*}$ der FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)-Zeitreihe \mathcal{X} seien und außerdem $\hat{\alpha}_i = \hat{\beta}_0 = \hat{\beta}_j = 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}$ für $i > \mathbf{p}$ sowie $j > \mathbf{q}^*$ und $\hat{m}_2 = \hat{m}_2(\mathcal{X}) := N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathcal{X}_i^2$ gelte.

Satz 4.26. *Es seien $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_{\mathbf{p}}, \hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_{\mathbf{q}^*} \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ Schätzer für die Operatoren $\alpha_1, \dots, \alpha_{\mathbf{p}}, \beta_0, \dots, \beta_{\mathbf{q}^*} \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ einer FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)-Zeitreihe \mathcal{X} mit $\hat{\beta}_0 = 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} = \beta_0$, die auf einer Stichprobe $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_N$ mit $N \in \mathbb{N}$ von \mathcal{X} basieren. Dann gilt für die Schätzer $\hat{\delta}$ in (4.49) für δ mit $\hat{\alpha}_i = \alpha_i = \hat{\beta}_j = \beta_j = 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}$ für $i > \mathbf{p}$ und $j > \mathbf{q}^*$:*

$$\|\hat{\delta} - \delta\|_{\mathcal{H}} = O_{\mathbb{P}}(N^{-1/2}) + \sum_{i=1}^{\mathbf{r}^*} O_{\mathbb{P}}(\|\hat{\alpha}_i - \alpha_i\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}) + O_{\mathbb{P}}(\|\hat{\beta}_i - \beta_i\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}). \quad (4.50)$$

Beweis. Aus (4.48), (4.49), elementaren Umformungen und (4.4) folgt:

$$\begin{aligned} \|\hat{\delta} - \delta\|_{\mathcal{H}} &\leq \|\hat{m}_2 - m_2\|_{\mathcal{H}} \left(1 + \sum_{i=1}^{\mathbf{r}^*} \|\alpha_i + \beta_i\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} \right) \\ &\quad + \|\hat{m}_2\|_{\mathcal{H}} \left(\sum_{i=1}^{\mathbf{r}^*} \|\hat{\alpha}_i - \alpha_i\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} + \|\hat{\beta}_i - \beta_i\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} \right) \\ &= O_{\mathbb{P}}(N^{-1/2}) + \sum_{i=1}^{\mathbf{r}^*} O_{\mathbb{P}}(\|\hat{\alpha}_i - \alpha_i\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}) + O_{\mathbb{P}}(\|\hat{\beta}_i - \beta_i\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}). \quad \square \end{aligned}$$

4.3 Operatorschätzung im FARCH-Modell

In diesem Abschnitt widmen wir uns der Schätzung der Operatoren von \mathcal{H} -wertigen FARCH-Zeitreihen. Dabei werden wir zunächst Schätzer für den Operator im FARCH(1)-Modell herleiten, sowie auf schwache Konsistenz untersuchen und diese Überlegungen zur Herleitung der Schätzer für die Operatoren im FARCH(\mathbf{p})-Modell mit $\mathbf{p} > 1$ verwenden.

4.3.1 Operatorschätzung im FARCH(1)-Modell

Es sei $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine FARCH(1)-Zeitreihe mit einer u.i.v. Zeitreihe aus Innovationen $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, d.h. es gilt

$$\mathcal{X}_k = \varepsilon_k \odot \sigma_k, \quad \sigma_k^2 = \delta + \alpha_1(\mathcal{X}_{k-1}^2) \quad (4.51)$$

f.s. für alle k . Ferner sei $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (\mathcal{X}_k^2 - m_2)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit

$$\mathcal{Z}_k = \alpha_1(\mathcal{Z}_{k-1}) + \nu_k \quad (4.52)$$

f.s. für alle k die zugehörnde induzierte FAR(1)-Zeitreihe mit der Zeitreihe aus Innovationen $\nu = (\nu_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (\mathcal{X}_k^2 - \sigma_k^2)_{k \in \mathbb{Z}}$, wobei die Eigenschaften von \mathcal{Z} und ν in Eigenschaften 4.6 diskutiert wurden. Für jedes $h \in \mathbb{Z}$ gelte im Folgenden $\mathcal{C}_h = \mathcal{C}_{h;\mathcal{X}}$ und $\hat{\mathcal{C}}_h = \hat{\mathcal{C}}_{h;\mathcal{X}^2}$ aus (4.6) seien die empirischen Autokovarianzoperatoren von $\mathcal{X}^2 := (\mathcal{X}_k^2)_{k \in \mathbb{Z}}$, die auf einer Stichprobe $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_N$ von \mathcal{X} mit $N \in \mathbb{N}$ basieren (siehe Bemerkung 4.7). Ferner sei $(c_j)_{j \in \mathbb{N}}$ die Eigenwertfolge mit der zugehörnden Eigenfunktionenfolge $(\mathbf{c}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von \mathcal{C}_0 und $(\hat{c}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sei die Eigenwertfolge mit der zugehörnden Eigenfunktionenfolge $(\hat{\mathbf{c}}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von $\hat{\mathcal{C}}_0 = \hat{\mathcal{C}}_{0;\mathcal{X}^2}$.

Der Operator einer FAR(1)-Zeitreihe besitzt die folgende zentrale Eigenschaft.

Satz 4.27. α_1 aus (4.52) ist eine Lösung der Yule-Walker-Gleichung, d.h.

$$\mathcal{C}_1 = \alpha_1 \mathcal{C}_0, \quad (4.53)$$

wobei α_1 genau dann die eindeutige Lösung von (4.53) ist, wenn \mathcal{C}_0 injektiv ist.

Beweis. Aus der Definition von \mathcal{C}_0 und \mathcal{C}_1 , $\mathcal{Z}_1 = \alpha_1(\mathcal{Z}_0) + \nu_1$ f.s., Eigenschaften 2.23 (f) und dem Satz der majorisierten Konvergenz folgt für jede ONB $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von \mathcal{H} :

$$\mathcal{C}_1 = \mathbb{E}[\alpha_1(\langle \mathcal{Z}_0, \cdot \rangle_{\mathcal{H}} \mathcal{Z}_0)] + \mathbb{E}[\langle \mathcal{Z}_0, \cdot \rangle_{\mathcal{H}} \nu_1] = \alpha_1 \mathcal{C}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} h_j \mathbb{E}[\nu_1 \langle \mathcal{Z}_0, \cdot \rangle_{\mathcal{H}} h_j]_{\mathcal{H}},$$

wobei nach dem Satz von Fubini wegen $\nu_1 = \sigma_1^2 \odot (\varepsilon_1^2 - \mathbf{1})$ und $\mathbb{E}(\varepsilon_1^2) = \mathbf{1}$ für alle j

$$\mathbb{E}[\nu_1 \langle \mathcal{Z}_0, \cdot \rangle_{\mathcal{H}} h_j]_{\mathcal{H}} = \int \mathbb{E}[\langle \mathcal{Z}_0, \cdot \rangle_{\mathcal{H}} \sigma_1^2(t)] \mathbb{E}[\varepsilon_1^2(t) - 1] dt = 0$$

gilt. Damit ist \mathcal{C}_0 eine Lösung der Gleichung (4.53). Diese Lösung ist nach Satz 4.22 und dem Spektralsatz genau dann eindeutig, wenn \mathcal{C}_0 injektiv ist. \square

Erfüllen δ und α_1 die Annahme 4.8 und die Zeitreihe $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{H}$ aus Innovationen (4.2) sowie die Annahme 4.9, existiert nach Lemma 4.11 und Satz 4.27 eine eindeutige Lösung α_1 der Yule-Walker-Gleichung $\mathcal{C}_1 = \alpha_1 \mathcal{C}_0$. Unter den Annahmen 4.8 und 4.9 setzen wir

$$\hat{\alpha}_1 := \hat{\mathcal{C}}_1 \hat{\mathcal{C}}_0^\dagger \prod_{\hat{\mathbf{c}}_1}^{\hat{\mathbf{c}}_K} = \hat{\mathcal{C}}_1 \hat{\mathcal{C}}_0 (\hat{\mathcal{C}}_0^2 + \vartheta_N \mathbb{I}_{\mathcal{H}})^{-1} \prod_{\hat{\mathbf{c}}_1}^{\hat{\mathbf{c}}_K} \quad (4.54)$$

als Schätzer für α_1 an, wobei $K \in \mathbb{N}$ bzw. $K = K_N \in \mathbb{N}$ gelte, $(\vartheta_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \infty)$ eine Nullfolge und $\prod_{\hat{\mathbf{c}}_1}^{\hat{\mathbf{c}}_K}$ der Projektor auf $\overline{\text{lin}\{\hat{\mathbf{c}}_1, \dots, \hat{\mathbf{c}}_K\}} \subseteq \mathcal{H}$ sei (siehe Definition und Eigenschaften 2.18). Gemäß folgendem Satz handelt es sich bei diesen Schätzern um konsistente Schätzer für die Projektionen von α_1 auf bestimmte endlichdimensionale Unterräume.

Satz 4.28. Es sei $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine \mathcal{H} -wertige FAR(1)-Zeitreihe mit den Eigenschaften auf S. 33 f., deren Parameter δ und α_1 die Annahme 4.8 und deren Zeitreihe $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ aus Innovationen (4.2) die Annahme 4.9 erfüllen. Zudem erfülle der Kovarianzoperator $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_{0;\mathcal{X}}$ der durch \mathcal{X} induzierten FAR(1)-Zeitreihe \mathcal{Z} die Annahme 4.18. Dann gilt für die Schätzer $\hat{\alpha}_1$ aus (4.54) mit $\vartheta_N = O(N^{-1/2})$ für jedes feste $K \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{J}_K := \{\phi_{ij} | 1 \leq i, j \leq K\}$

$$\left\| \hat{\alpha}_1 - \prod_{\mathcal{J}_K} \alpha_1 \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(N^{-1}), \quad (4.55)$$

wobei $(\phi_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ für die durch die Eigenfunktionenfolge $(\mathbf{c}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von \mathcal{C}_0 induzierte ONB von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ steht.

Beweis. Für den Schätzer $\hat{\alpha}_1$ aus (4.54) gilt für alle $K, N \in \mathbb{N}$ nach der operatorwertigen Hölder-Ungleichung, Satz 4.7, $\mathbb{I}_{\mathcal{H}} = \mathbb{I}_{\hat{\mathbf{c}}_1}^{\hat{\mathbf{c}}_K} + \mathbb{I}_{\hat{\mathbf{c}}_{K+1}}^{\hat{\mathbf{c}}_{\infty}}$, der Yule-Walker-Gleichung $\mathcal{C}_1 = \alpha_1 \mathcal{C}_0$ und wegen $\mathcal{C}_0^{\dagger} := \mathcal{C}_0 \mathcal{C}_0^{\dagger} = \mathcal{C}_0^2 (\mathcal{C}_0^2 + \vartheta_N \mathbb{I})^{-1}$, sowie wegen $\alpha_1 = \prod_{\mathcal{J}_K} \alpha_1 + \prod_{\mathcal{J}_K^c} \alpha_1$ mit den Mengen $\mathcal{J}_K := \{\phi_{ij} | 1 \leq i, j \leq K\}$ und $\mathcal{J}_K^c = \{\phi_{ij} | i, j > K\}$:

$$\begin{aligned} \left\| \hat{\alpha}_1 - \prod_{\mathcal{J}_K} \alpha_1 \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 &\lesssim \left\| (\hat{\mathcal{C}}_1 - \mathcal{C}_1) \hat{\mathcal{C}}_0^{\dagger} \prod_{\hat{\mathbf{c}}_1}^{\hat{\mathbf{c}}_K} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 + \left\| \mathcal{C}_1 \hat{\mathcal{C}}_0^{\dagger} \prod_{\hat{\mathbf{c}}_1}^{\hat{\mathbf{c}}_K} - \prod_{\mathcal{J}_K} \alpha_1 \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \\ &\lesssim \|\hat{\mathcal{C}}_1 - \mathcal{C}_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \left\| \hat{\mathcal{C}}_0^{\dagger} \prod_{\hat{\mathbf{c}}_1}^{\hat{\mathbf{c}}_K} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^2 + \|\mathcal{C}_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \left\| \hat{\mathcal{C}}_0^{\dagger} \prod_{\hat{\mathbf{c}}_1}^{\hat{\mathbf{c}}_K} - \mathcal{C}_0^{\dagger} \prod_{\mathbf{c}_1}^{\mathbf{c}_K} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^2 \\ &\quad + \left\| \alpha_1 \mathcal{C}_0^{\dagger} \prod_{\mathbf{c}_1}^{\mathbf{c}_K} - \prod_{\mathcal{J}_K} \alpha_1 \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \\ &\lesssim O_{\mathbb{P}}(N^{-1}) \left\| \hat{\mathcal{C}}_0^{\dagger} \prod_{\hat{\mathbf{c}}_1}^{\hat{\mathbf{c}}_K} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^2 + \left\| \hat{\mathcal{C}}_0^{\dagger} \prod_{\hat{\mathbf{c}}_1}^{\hat{\mathbf{c}}_K} - \mathcal{C}_0^{\dagger} \prod_{\mathbf{c}_1}^{\mathbf{c}_K} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^2 + \left\| \prod_{\mathcal{J}_K^c} \alpha_1 \mathcal{C}_0^{\dagger} \prod_{\mathbf{c}_1}^{\mathbf{c}_K} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \\ &\quad + \left\| \prod_{\mathcal{J}_K} \alpha_1 \left[\mathcal{C}_0^{\dagger} \prod_{\mathbf{c}_1}^{\mathbf{c}_K} - \mathbb{I}_{\mathcal{H}} \right] \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \\ &=: O_{\mathbb{P}}(N^{-1}) \cdot T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Term T_1 : Per Definition der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}$, wegen $\hat{\mathcal{C}}_0^{\dagger} = \hat{\mathcal{C}}_0 (\hat{\mathcal{C}}_0^2 + \vartheta_N \mathbb{I}_{\mathcal{H}})^{-1}$ und da $\hat{\mathcal{C}}_0$ die zur Eigenfunktionenfolge $(\hat{\mathbf{c}}_j)_j$ gehörende Eigenwertfolge $(\hat{c}_j)_j$ hat, gilt

$$\left\| \hat{\mathcal{C}}_0^{\dagger} \prod_{\hat{\mathbf{c}}_1}^{\hat{\mathbf{c}}_K} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^2 = \sup_{j \leq K} \left(\frac{\hat{c}_j}{\hat{c}_j^2 + \vartheta_N} \right)^2$$

für alle K und N . Folglich gilt wegen $\frac{\hat{c}_j}{(\hat{c}_j + \vartheta_N)^2} = 0$ im Fall $\hat{c}_j = 0$ bzw. $\frac{\hat{c}_j}{(\hat{c}_j + \vartheta_N)^2} \leq \hat{c}_j^{-1}$ im Fall $\hat{c}_j \neq 0$ für alle j , sowie (4.21) mit $K_N := K$ für alle N :

$$\left\| \hat{\mathcal{C}}_0^{\dagger} \prod_{\hat{\mathbf{c}}_1}^{\hat{\mathbf{c}}_K} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(c_K^{-2}) = O_{\mathbb{P}}(1). \quad (4.57)$$

Term T_2 : Gemäß der Definition der Tichonow-Regularisierten, sowie der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}$, und weil $(\hat{\mathbf{c}}_j''')_j$ f.s., sowie $(\mathbf{c}_j)_j$ ONBs von \mathcal{H} sind, gilt für jedes feste K :

$$\begin{aligned}
\left\| \hat{\mathcal{C}}_0^\dagger \prod_{\hat{\mathbf{c}}_1}^{\hat{\mathbf{c}}_K} - \mathcal{C}_0^\dagger \prod_{\mathbf{c}_1}^{\mathbf{c}_K} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^2 &= \sup_{\|x\|_{\mathcal{H}} \leq 1} \left\| \sum_{j=1}^K \frac{\hat{c}_j}{\hat{c}_j^2 + \vartheta_N} \langle x, \hat{\mathbf{c}}_j''' \rangle_{\mathcal{H}} \hat{\mathbf{c}}_j''' - \frac{c_j}{c_j^2 + \vartheta_N} \langle x, \mathbf{c}_j \rangle_{\mathcal{H}} \mathbf{c}_j \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\lesssim \sup_{\|x\|_{\mathcal{H}} \leq 1} \sum_{j=1}^K \left| \frac{\hat{c}_j}{\hat{c}_j^2 + \vartheta_N} - \frac{c_j}{c_j^2 + \vartheta_N} \right|^2 \langle x, \hat{\mathbf{c}}_j''' \rangle_{\mathcal{H}}^2 \\
&\quad + \left\| \sum_{j=1}^K \frac{c_j}{c_j^2 + \vartheta_N} [\langle x, \hat{\mathbf{c}}_j''' \rangle_{\mathcal{H}} \hat{\mathbf{c}}_j''' - \langle x, \mathbf{c}_j \rangle_{\mathcal{H}} \mathbf{c}_j] \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\lesssim \sup_{j \leq K} \left| \frac{\hat{c}_j}{\hat{c}_j^2 + \vartheta_N} - \frac{c_j}{c_j^2 + \vartheta_N} \right|^2 + \sup_{\|x\|_{\mathcal{H}} \leq 1} \sum_{j=1}^K \left| \frac{c_j}{c_j^2 + \vartheta_N} \right|^2 \langle x, \hat{\mathbf{c}}_j''' - \mathbf{c}_j \rangle_{\mathcal{H}}^2 \\
&\quad + \sup_{\|x\|_{\mathcal{H}} \leq 1} \left\| \sum_{j=1}^K \frac{c_j}{c_j^2 + \vartheta_N} \langle x, \mathbf{c}_j \rangle_{\mathcal{H}} (\hat{\mathbf{c}}_j''' - \mathbf{c}_j) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\lesssim \sup_{j \leq K} (\hat{c}_j - c_j)^2 \frac{\vartheta_N^2 + \hat{c}_j^2 c_j^2}{(\hat{c}_j^2 + \vartheta_N)^2 (c_j^2 + \vartheta_N)^2} + (K+1) c_K^{-2} \sup_{j \leq K} \|\hat{\mathbf{c}}_j''' - \mathbf{c}_j\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\lesssim c_K^{-2} (c_K^{-2} + (\hat{c}_K^2 + \vartheta_N)^{-1}) \sup_{j \leq K} (\hat{c}_j - c_j)^2 + K c_K^{-2} \sup_{j \leq K} \|\hat{\mathbf{c}}_j''' - \mathbf{c}_j\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= O_{\mathbb{P}}(c_K^{-4} N^{-1}) + O_{\mathbb{P}}(c_K^{-4} K N^{-1}) \\
&= O_{\mathbb{P}}(N^{-1}), \tag{4.58}
\end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt Korollar 4.13 und Lemma 4.21 mit $K = K_N$ eingegangen sind.

Term T_3 : Da es sich bei $(\mathbf{c}_l)_l$ um eine ONB von \mathcal{H} handelt und $\phi_{ij}(\mathbf{c}_l) = \delta_{il} \mathbf{c}_j$ für alle i, j, l gilt, gilt für $\alpha_1 \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ mit $\mathcal{J}_K^c := \{\phi_{ij} | i, j > K\}$ wegen $\alpha_1 = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle \alpha_1, \phi_{ij} \rangle_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}} \phi_{ij}$ und $\langle \alpha_1, \phi_{ij} \rangle_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}} = \sum_{m=1}^{\infty} \langle \alpha_1(\mathbf{c}_m), \delta_{im} \mathbf{c}_j \rangle_{\mathcal{H}}$ für alle $i, j, l, K \in \mathbb{N}$:

$$\prod_{\mathcal{J}_K^c} \alpha_1(\mathbf{c}_l) = \mathbf{1}_{\mathbb{N}_{>K}}(l) \sum_{j>K} \langle \alpha_1, \phi_{lj} \rangle_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}} \mathbf{c}_j = \mathbf{1}_{\mathbb{N}_{>K}}(l) \sum_{j>K} \langle \alpha_1(\mathbf{c}_l), \mathbf{c}_j \rangle_{\mathcal{H}} \mathbf{c}_j.$$

Demzufolge gilt per Definition der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}$ und wegen $\mathcal{C}_0^\dagger \prod_{\mathbf{c}_1}^{\mathbf{c}_K}(\mathbf{c}_l) = \mathbf{1}_{\mathbb{N}_{>K}}(l) \frac{c_l^2}{c_l^2 + \vartheta_N} \mathbf{c}_l$ für alle l, K, N :

$$\left\| \prod_{\mathcal{J}_K^c} \alpha_1 \mathcal{C}_0^\dagger \prod_{\mathbf{c}_1}^{\mathbf{c}_K} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = \sum_{l=1}^K \mathbf{1}_{\mathbb{N}_{>K}}(l) \left(\frac{c_l}{c_l^2 + \vartheta_N} \right)^2 \left\| \sum_{j>K} \langle \alpha_1(\mathbf{c}_l), \mathbf{c}_j \rangle_{\mathcal{H}} \mathbf{c}_j \right\|_{\mathcal{H}}^2 = 0. \tag{4.59}$$

Term T_4 : Aus den Überlegungen bei der Herleitung der Raten von T_1 bis T_3 folgt für feste $K \in \mathbb{N}$ im Fall $\vartheta_N = O(N^{-1/2})$:

$$\begin{aligned}
\left\| \prod_{\mathcal{J}_K} \alpha_1 \left[\mathcal{C}_0^\dagger \prod_{\mathbf{c}_1}^{\mathbf{c}_K} - \mathbb{I}_{\mathcal{H}} \right] \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 &= \sum_{l=1}^{\infty} \left\| \prod_{\mathcal{J}_K} \alpha_1 \left(\left[\mathbf{1}_{\mathbb{N}_{\leq K}}(j) \frac{c_l^2}{c_l^2 + \vartheta_N} - 1 \right] \mathbf{c}_l \right) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} \left\| \left[\mathbf{1}_{\mathbb{N}_{\leq K}}(l) \frac{c_l^2}{c_l^2 + \vartheta_N} - 1 \right] \mathbf{1}_{\mathbb{N}_{\leq K}}(l) \sum_{j=1}^K \langle \alpha_1(\mathbf{c}_l), \mathbf{c}_j \rangle_{\mathcal{H}} \mathbf{c}_j \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \sum_{j,l=1}^K \left(\frac{\vartheta_N}{c_l^2 + \vartheta_N} \right)^2 \langle \alpha_1(\mathbf{c}_l), \mathbf{c}_j \rangle_{\mathcal{H}}^2 \leq \vartheta_N^2 c_K^{-4} \sum_{l=1}^K \|\alpha_1(\mathbf{c}_l)\|_{\mathcal{H}}^2
\end{aligned}$$

$$\leq \vartheta_N^2 c_K^{-4} \|\alpha_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O(N^{-1}). \quad (4.60)$$

Einsetzen von (4.57) bis (4.60) in (4.56) führt dann für feste $K \in \mathbb{N}$ zu (4.55). \square

Bemerkung 4.29. Die Rate des quadratischen Schätzfehlers des Schätzers für die Projektion von α_1 auf einen endlichdimensionalen, von einem ONS von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ aufgespannten Unterraum in Satz 4.28 stimmt mit der Rate des quadrierten Schätzfehlers des Schätzers für die Projektion des Integralkerns vom Operator im FARCH(1)-Modell aus Theorem 3.1 in [22] überein. Weil von \mathcal{H} nach \mathcal{H} abbildende Operatoren nach Definition und Eigenschaften 2.15 genau dann Hilbert-Schmidt-Operatoren sind, wenn sie Integraloperatoren sind, sind die Aussagen von Satz 4.28 und Theorem 3.1 in [22] gleichbedeutend. Der Beweis von Satz 4.28 war insofern nutzbringend, da die Argumente in den Beweisen für die Schätzung von α_1 , ohne α_1 auf einen endlichdimensionalen Unterraum zu projizieren und für die Schätzung der Operatoren im FARCH(\mathfrak{p})-Modell mit $\mathfrak{p} > 1$ sowie im FGARCH-Modell, im Wesentlichen auf den Argumenten im Beweis von Satz 4.28 beruhen. \blacklozenge

Im folgenden Satz treffen wir eine Aussage über das asymptotische Verhalten des quadratischen Schätzfehlers des Schätzers für α_1 , ohne α_1 auf einen endlichdimensionalen Unterraum zu projizieren. Soweit bekannt, wurde solch ein Resultat (insbesondere mit einer konkreten Konvergenzrate) bislang noch nicht aufgestellt (siehe hierzu [22], [3] und [11]). Wie bereits erwähnt, werden wir im Nachweis des Satzes die Beweisidee von Satz 4.28 verwenden, und zwar indem wir die Anzahl der Projektionen $K = K_N$ bei wachsendem Stichprobenumfang N gegen unendlich streben lassen.

Satz 4.30. *Es sei $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine \mathcal{H} -wertige FARCH(1)-Zeitreihe, es gelten die Annahmen von Satz 4.28 und $(\alpha_1, (\phi_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}})$ mit $(\phi_{ij})_{i,j}$ aus Satz 4.28 erfülle die Annahme 4.24 für ein $\beta > 0$. Dann gilt für die Schätzer $\hat{\alpha}_1$ aus (4.54) mit $\vartheta_N = O(N^{-1/2})$ für jede Folge $(K_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $K = K_N = \Xi(1, N)$ und $c_K^{-4} K^{2\beta+1} = O(N)$:*

$$\|\hat{\alpha}_1 - \alpha_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta}). \quad (4.61)$$

Beweis. Aus den Umformungen im Beweis von Satz 4.28 und da $(\alpha_1, (\phi_{ij})_{i,j})$ die Annahme 4.24 für ein $\beta > 0$ erfüllt, gilt wegen $c_K^{-4} K^{2\beta+1} = O(N)$ und $\vartheta_N = O(N^{-1/2})$:

$$\begin{aligned} \|\hat{\alpha}_1 - \alpha_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 &\lesssim \left\| \hat{\alpha}_1 - \prod_{\mathcal{I}_K} \alpha_1 \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 + \left\| \prod_{\mathcal{I}_K^c} \alpha_1 \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \\ &= O_{\mathbb{P}}(c_K^{-4} K N^{-1}) + \vartheta_N^2 c_K^{-4} + O(K^{-2\beta}) \\ &= O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta}). \end{aligned} \quad \square$$

Falls das asymptotische Verhalten der absolutsummierbaren Eigenwertfolge des Kovarianzoperators bekannt ist, kann sogar eine explizite Rate des quadratischen Schätzfehlers aus Satz 4.30 angegeben werden. Diesen Sachverhalt verdeutlichen wir anhand der nachfolgenden Beispiele.

Beispiele 4.31. Es gelten die Voraussetzungen von Satz 4.30, $(c_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sei die Eigenwertfolge des Kovarianzoperators $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_{0;\mathcal{X}}$ und β sei die Variable aus Satz 4.30.

- (a) Angenommen es gilt $c_N \asymp e^{-N}$. Dann ist $(K_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $K_N := 1 + \lfloor \frac{\ln(N)}{4+b} \rfloor$ für alle $N \in \mathbb{N}$ für ein $b > 0$ eine Folge mit $K = K_N \sim \frac{\ln(N)}{4+b}$. Folglich gelten $K = \Xi(1, N)$ sowie $c_K^{-4} K^{2\beta+1} \asymp N^{\frac{4}{4+b}} \ln^{2\beta+1}(N) = O(N)$ und somit gilt nach Satz 4.30:

$$\|\hat{\alpha}_1 - \alpha_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(\ln^{-2\beta}(N)).$$

- (b) Gelte nun $c_N \asymp N^{-a}$ für ein $a > 1$, so ist $(K_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $K_N := 1 + \lfloor N^{\frac{1}{1+4a+2\beta}} \rfloor$ für alle $N \in \mathbb{N}$ eine Folge mit $K = K_N \sim N^{\frac{1}{1+4a+2\beta}}$. Folglich gelten $K = \Xi(1, N)$ sowie $c_K^{-4} K^{2\beta+1} \asymp K^{1+4a+2\beta} \asymp N$ und somit gilt nach Satz 4.30:

$$\|\hat{\alpha}_1 - \alpha_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}\left(N^{-\frac{2\beta}{1+4a+2\beta}}\right).$$

Bspw. für $a = \frac{5}{4}$ und $\beta = 3$ gilt $\|\hat{\alpha}_1 - \alpha_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(N^{-\frac{1}{2}})$.

- (c) Es gelte $c_N \asymp N^{-1} \ln^{-c}(N)$ für ein $c > 1$. Dann handelt es sich bei $(K_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $K_N := 1 + \lfloor N^{\frac{1}{2\beta+\tilde{c}}} \rfloor$ für alle $N \in \mathbb{N}$ für ein $\tilde{c} > 5$ um eine Folge mit $K = K_N \sim N^{\frac{1}{2\beta+\tilde{c}}}$. Somit gelten $K = \Xi(1, N)$ und $c_K^{-4} K^{2\beta+1} \asymp N^{\frac{2\beta+5}{2\beta+\tilde{c}}} \ln^4(N) = O(N)$ und folglich gilt nach Satz 4.30 für alle $\tilde{c} > 5$:

$$\|\hat{\alpha}_1 - \alpha_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}\left(N^{-\frac{2\beta}{2\beta+\tilde{c}}}\right).$$

Bspw. für $\beta = 3, c = 2$ und $\tilde{c} = \frac{21}{4}$ gilt $\|\hat{\alpha}_1 - \alpha_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(N^{-\frac{8}{15}})$. ◆

4.3.2 Operatorschätzung im FARCH(p)-Modell mit $p > 1$

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der Schätzung der Operatoren der FARCH(p)-Zeitreihe $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit den auf S.33 f. erwähnten Eigenschaften im Fall $p > 1$. Für die durch \mathcal{X} induzierte FAR(p)-Zeitreihe $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (\mathcal{X}_k^2 - m_2)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit $m_2 := E(\mathcal{X}_1^2)$ und der Zeitreihe aus Innovationen $\nu = (\nu_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (\mathcal{X}_k^2 - \sigma_k^2)_{k \in \mathbb{Z}}$ gilt dabei

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Z}_k \\ \mathcal{Z}_{k-1} \\ \vdots \\ \mathcal{Z}_{k-p+2} \\ \mathcal{Z}_{k-p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_k \\ 0_{\mathcal{H}} \\ \vdots \\ 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_p \\ \mathbb{I}_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} & \cdots & \cdots & 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} & \mathbb{I}_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} & \cdots & 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} & \cdots & 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} & \mathbb{I}_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_{k-1} \\ \mathcal{Z}_{k-2} \\ \vdots \\ \mathcal{Z}_{k-p+1} \\ \mathcal{Z}_{k-p} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{Z}_k(\mathbf{p}) = \tilde{\nu}_k(\mathbf{p}) + \mathbf{A}(\mathcal{Z}_{k-1}(\mathbf{p})) \quad (4.62)$$

f.s. für alle k . Damit handelt es sich bei $\mathcal{Z}(\mathbf{p}) = (\mathcal{Z}_k(\mathbf{p}))_{k \in \mathbb{Z}} := ((\mathcal{Z}_k, \mathcal{Z}_{k-1}, \dots, \mathcal{Z}_{k-p+1})^T)_{k \in \mathbb{Z}}$ um eine \mathcal{H}^p -wertige FAR(1)-Zeitreihe mit operatorwertiger Matrix $\mathbf{A}: \mathcal{H}^p \rightarrow \mathcal{H}^p$ und \mathcal{H}^p -wertiger Zeitreihe aus Innovationen $\tilde{\nu}(\mathbf{p}) = (\tilde{\nu}_k(\mathbf{p}))_{k \in \mathbb{Z}} := ((\nu_k, 0_{\mathcal{H}}, \dots, 0_{\mathcal{H}})^T)_{k \in \mathbb{Z}}$.

Für die Herleitung der Schätzer und zur Bestimmung der Raten der quadratischen Schätzfehler der Schätzer für die Operatoren im FARCH(p)-Modell benötigen wir diverse Hilfsmittel, die teilweise auf Ideen von Aue und Klepsch in [4] basieren.

Eigenschaften 4.32.

- (a) $\mathcal{X}^2(\mathbf{p}) = (\mathcal{X}_k^2(\mathbf{p}))_{k \in \mathbb{Z}} := ((\mathcal{X}_k^2, \mathcal{X}_{k-1}^2, \dots, \mathcal{X}_{k-\mathbf{p}+1}^2)^T)_{k \in \mathbb{Z}}$ ist eine stationäre, bzgl. $(\varepsilon_k)_k$ kausale, geometrisch $L_{\mathcal{H}^{\mathbf{p}}}^4$ - m -approximierbare Zeitreihe.
- (b) $\mathcal{Z}(\mathbf{p})$ ist eine zentrierte, stationäre, bzgl. $(\varepsilon_k)_k$ kausale, geometrisch $L_{\mathcal{H}^{\mathbf{p}}}^4$ - m -approximierbare Zeitreihe.
- (c) $\tilde{\nu}(\mathbf{p})$ ist ein bzgl. $(\varepsilon_k)_k$ kausales, geometrisch $L_{\mathcal{H}^{\mathbf{p}}}^4$ - m -approximierbares halb-starkes weißes Rauschen.

Beweis.

(a) Nach Lemma 3.6 handelt es sich bei $\mathcal{X}^2 = (\mathcal{X}_k^2)_k$ um eine stationäre, bzgl. $\varepsilon = (\varepsilon_k)_k$ kausale und geometrisch $L_{\mathcal{H}}^4$ - m -approximierbare Zeitreihe, womit $\mathcal{X}^2(\mathbf{p}) = (\mathcal{X}_k^2(\mathbf{p}))_{k \in \mathbb{Z}} := ((\mathcal{X}_k^2, \mathcal{X}_{k-1}^2, \dots, \mathcal{X}_{k-\mathbf{p}+1}^2)^T)_k$ eine stationäre Zeitreihe ist. Wegen Kausalität von \mathcal{X}^2 bzgl. ε existiert eine messbare Funktion $f: \mathcal{H}^\infty \rightarrow \mathcal{H}$ mit $\mathcal{X}_k^2 = f(\varepsilon_k, \varepsilon_{k-1}, \dots)$ f.s. für alle k und es gibt folglich eine messbare Funktion $g: \mathcal{H}^\infty \rightarrow \mathcal{H}^{\mathbf{p}}$ mit

$$\mathcal{X}_k^2(\mathbf{p}) = \left(f(\varepsilon_k, \varepsilon_{k-1}, \dots), \dots, f(\varepsilon_{k-\mathbf{p}+1}, \varepsilon_{k-\mathbf{p}}, \dots) \right)^T =: g(\varepsilon_k, \varepsilon_{k-1}, \dots)$$

f.s. für alle k , womit auch $\mathcal{X}^2(\mathbf{p})$ bzgl. ε kausal ist. Aus dieser Darstellung folgt dann für die l -ten Komponenten von $\mathcal{X}_{k,m}^2(\mathbf{p}) := g(\varepsilon_k, \dots, \varepsilon_{k-m+1}, \varepsilon_{k-m}^{(m)}, \varepsilon_{k-m-1}^{(m)}, \dots)$ mit $k \in \mathbb{Z}, l := 1, \dots, \mathbf{p}$ und $m \in \mathbb{N}$: $\mathcal{X}_{k,m}^{(l)}(\mathbf{p}) = f(\varepsilon_{k+1-l}, \dots, \varepsilon_{k-m+1}, \varepsilon_{k-m}^{(m)}, \varepsilon_{k-m-1}^{(m)}, \dots) = \mathcal{X}_{k+1-l,m}^2$ (siehe Definition 2.37). Per Definition von $\nu_{4,\mathcal{H}^{\mathbf{p}}}(\cdot)$ sowie der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^{\mathbf{p}}}^2$, wegen Stationarität von $\mathcal{X}^2(\mathbf{p})$ sowie $(\mathcal{X}_{k,m}^2(\mathbf{p}))_k$, der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung und da $\mathcal{X}^2 = (\mathcal{X}_k^2)_k$ geometrisch $L_{\mathcal{H}}^4$ - m -approximierbar ist, gilt

$$\begin{aligned} \nu_{4,\mathcal{H}^{\mathbf{p}}}(\mathcal{X}_m^2(\mathbf{p}) - \mathcal{X}_{m,m}^2(\mathbf{p})) &= \left[\sum_{k,l=1}^{\mathbf{p}} \mathbb{E} \|\mathcal{X}_{m+1-k}^2 - \mathcal{X}_{m+1-k,m}^2\|_{\mathcal{H}} \|\mathcal{X}_{m+1-l}^2 - \mathcal{X}_{m+1-l,m}^2\|_{\mathcal{H}} \right]^{1/4} \\ &\leq \nu_{4,\mathcal{H}}(\mathcal{X}_m^2 - \mathcal{X}_{m,m}^2) = O(\rho^m) \end{aligned}$$

für ein $\rho \in (0, 1)$ mit $m \rightarrow \infty$. Damit ist $\mathcal{X}^2(\mathbf{p})$ geometrisch $L_{\mathcal{H}^{\mathbf{p}}}^4$ - m -approximierbar.

(b) folgt aus der Argumentation in (a) und Eigenschaften 4.6 (b).

(c) folgt aus der Argumentation in (a) und Eigenschaften 4.6 (c). □

Bevor wir nun zeigen, dass die erste Zeile von \mathbf{A} in (4.62), d.h. der Zeilenvektor

$$\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_{\mathbf{p}}), \tag{4.63}$$

der nach Lemma 2.16 Element von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathbf{p}},\mathcal{H}}$ ist, wie α_1 im FARCH(1)-Modell eine gewisse Yule-Walker-Gleichung erfüllt, führen wir noch die folgenden Operatoren ein.

Definition und Eigenschaften 4.33.

(a) Wir schreiben

$$\mathfrak{S}_{\mathbf{p}} := \mathcal{C}_{0;\mathcal{Z}(\mathbf{p})} = \mathbb{E}[\mathcal{Z}_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}) \otimes \mathcal{Z}_{\mathbf{p}}(\mathbf{p})]. \tag{4.64}$$

Gemäß Definition und Eigenschaften 2.32 ist dieser Operator selbstadjungiert sowie Element von $\mathcal{N}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}}}$ und es gilt

$$\|\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathcal{N}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}}}} = \mathfrak{p} \mathbb{E} \|\mathcal{Z}_0\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.65)$$

(b) Für alle $h \in \mathbb{Z}$ bezeichnen wir

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{p},h} := \mathcal{C}_{h;\mathcal{Z}(\mathfrak{p}),\mathcal{Z}} := \mathcal{C}_{\mathcal{Z}(\mathfrak{p}),\mathcal{Z}_{\mathfrak{p}+h}} = \mathbb{E}[\mathcal{Z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}) \otimes \mathcal{Z}_{\mathfrak{p}+h}] \quad (4.66)$$

als die Autokreuzkovarianzoperatoren von $\mathcal{Z}(\mathfrak{p})$ und \mathcal{Z} . Diese Operatoren sind nach Definition und Eigenschaften 2.29 Element von $\mathcal{N}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}},\mathcal{H}}$ und für alle h gilt

$$\|\mathfrak{S}_{\mathfrak{p},h}\|_{\mathcal{N}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}},\mathcal{H}}} \leq \sqrt{\mathfrak{p}} \mathbb{E} \|\mathcal{Z}_0\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.67)$$

Beweis.

(a) folgt aus (2.31), $\|\mathcal{Z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p})\|_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}}}^2 = \sum_{k=1}^{\mathfrak{p}} \|\mathcal{Z}_k\|_{\mathcal{H}}^2$ und Stationarität von \mathcal{Z} .

(b) Aufgrund von (2.32), $\mathbb{E} \|\mathcal{Z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p})\|_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}}}^2 = \mathfrak{p} \mathbb{E} \|\mathcal{Z}_0\|_{\mathcal{H}}^2$, der Definition von $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p},h}$ und Stationarität von \mathcal{Z} gilt für alle h

$$\|\mathfrak{S}_{\mathfrak{p},h}\|_{\mathcal{N}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}},\mathcal{H}}} \leq \left(\mathbb{E} \|\mathcal{Z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p})\|_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}}}^2 \mathbb{E} \|\mathcal{Z}_{\mathfrak{p}+h}\|_{\mathcal{H}}^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\mathfrak{p}} \mathbb{E} \|\mathcal{Z}_0\|_{\mathcal{H}}^2. \quad \square$$

Satz 4.34. Beim Zeilenvektor $\alpha = (\alpha_1 \cdots \alpha_{\mathfrak{p}})$, der aus den Operatoren des $FARCH(\mathfrak{p})$ -Modells besteht, handelt es sich um eine Lösung der Yule-Walker-Gleichung

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{p},1} = \alpha \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}, \quad (4.68)$$

wobei α genau dann die eindeutige Lösung ist, wenn $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ injektiv ist.

Beweis. Per Definition von α , $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p},1}$, $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ sowie $\mathcal{Z}_{\mathfrak{p}}$ und wegen $\mathcal{Z}_{\mathfrak{p}+1} = \sum_{k=1}^{\mathfrak{p}} \alpha_k (\mathcal{Z}_{\mathfrak{p}+1-k}) + \nu_{\mathfrak{p}+1}$ f.s., $\nu_{\mathfrak{p}+1} = \sigma_{\mathfrak{p}+1}^2 \odot (\varepsilon_{\mathfrak{p}+1}^2 - \mathbb{1})$ sowie $\mathbb{E}(\varepsilon_{\mathfrak{p}+1}^2) = \mathbb{1}$ gilt wie im Nachweis von Satz 4.27:

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{p},1} = \sum_{k=1}^{\mathfrak{p}} \alpha_k \mathbb{E}[\langle \mathcal{Z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}), \cdot \rangle_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}}} \mathcal{Z}_{\mathfrak{p}+1-k}] = \alpha \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}},$$

wobei $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ nach Satz 4.22 und nach dem Spektralsatz genau dann die eindeutige Lösung von (4.68) ist, wenn $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ injektiv ist. \square

Gemäß folgendem Lemma liegt unter bestimmten Annahmen auch im Fall $\mathfrak{p} > 1$ stets Injektivität von $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ vor, womit die Yule-Walker-Gleichung (4.68) stets eindeutig lösbar ist.

Lemma 4.35. Die Parameter δ und $\alpha_1, \dots, \alpha_{\mathfrak{p}}$ der \mathcal{H} -wertigen $FARCH(\mathfrak{p})$ -Zeitreihe \mathcal{X} erfüllen die Annahme 4.8 und deren Zeitreihe $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{H}$ aus Innovationen erfüllt (4.2). Falls $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ zusätzlich die Annahme 4.9 erfüllt, gilt:

(a) Es gibt keinen abgeschlossenen Unterraum $U \subsetneq \mathcal{H}^{\mathfrak{p}}$ mit $\mathbb{P}(\mathcal{X}^2(\mathfrak{p}) \in U) = 1$.

(b) Es gibt keinen abgeschlossenen Unterraum $U \subsetneq \mathcal{H}^{\mathfrak{p}}$ mit $\mathbb{P}(\mathcal{Z}(\mathfrak{p}) \in U) = 1$.

(c) Der Kovarianzoperator $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}} = \mathcal{C}_{0, \mathcal{Z}(\mathfrak{p})}$ ist injektiv.

Beweis.

(a) Mit vollständiger Induktion zeigen wir, dass für alle $k = 1, \dots, \mathfrak{p}$ kein abgeschlossener Unterraum $U^{[k]} \subsetneq \mathcal{H}^k$ mit $\mathbb{P}(\mathcal{X}^2(k) \in U^{[k]}) = 1$ existiert.

Induktionsanfang: Für den Nachweis für $k = 1$ siehe Lemma 4.11 (a).

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}_{<\mathfrak{p}}$.

Induktionsschluss ($k \rightarrow k+1$): Angenommen es gibt einen abgeschlossenen Unterraum $U^{[k+1]} \subsetneq \mathcal{H}^{k+1}$ mit $\mathcal{X}^2(k+1) \in U^{[k+1]}$ f.s. Dann gibt es ein $\mathbf{h} = (h_{k+1}, \dots, h_1) \in \mathcal{H}^{k+1}$ mit $\mathbf{h} \neq 0_{\mathcal{H}^{k+1}}$, sodass $\langle \mathcal{X}^2(k+1), (h_{k+1}, \dots, h_1) \rangle_{\mathcal{H}^{k+1}} := \sum_{i=1}^{k+1} \langle \mathcal{X}_i^2, h_i \rangle_{\mathcal{H}} = 0$ f.s. gilt.

1. Fall: $h_{k+1} = 0_{\mathcal{H}}$. $\langle \mathcal{X}^2(k+1), (h_{k+1}, \dots, h_1) \rangle_{\mathcal{H}^{k+1}} = \langle \mathcal{X}^2(k), (h_k, \dots, h_1) \rangle_{\mathcal{H}^k} = 0$ f.s. für jedes $\tilde{\mathbf{h}} := (h_k, \dots, h_1) \in \mathcal{H}^k$ mit $\tilde{\mathbf{h}} \neq 0_{\mathcal{H}^k}$. Somit gilt $\mathcal{X}^2(k) \in U^{[k]}$ f.s. für einen abgeschlossenen Unterraum $U^{[k]} \subsetneq \mathcal{H}^k$, was jedoch im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung steht.

2. Fall: $h_{k+1} \neq 0_{\mathcal{H}}$. Wegen $\mathcal{X}_{k+1}^2 = \sigma_{k+1}^2 \odot \varepsilon_{k+1}^2$ f.s., da die Zufallsvariablen $\sigma_{k+1}^2, \mathcal{X}_k^2, \dots, \mathcal{X}_1^2$ stochastisch unabhängig von ε_{k+1}^2 sind, aufgrund $m_2 = \mathbb{E}(\mathcal{X}_i^2) = \mathbb{E}(\sigma_i^2)$ für alle i und wegen Definition und Eigenschaften 2.25, gilt f.s.:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\langle \mathcal{X}^2(k+1), (h_{k+1}, \dots, h_1) \rangle_{\mathcal{H}^{k+1}} \middle| \varepsilon_{k+1}^2 \right] &= \langle \mathbb{E}[\mathcal{X}_{k+1}^2 | \varepsilon_{k+1}^2], h_{k+1} \rangle_{\mathcal{H}} + \sum_{i=1}^k \langle m_2, h_i \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle \varepsilon_{k+1}^2, m_2 \odot h_{k+1} \rangle_{\mathcal{H}} + \sum_{i=1}^k \langle m_2, h_i \rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Wegen $\langle \mathcal{X}^2(k+1), (h_{k+1}, \dots, h_1) \rangle_{\mathcal{H}^{k+1}} = 0$ f.s. gilt somit $\langle \varepsilon_{k+1}^2, m_2 \odot h_{k+1} \rangle_{\mathcal{H}} = c$ f.s. bzw. $\langle \varepsilon_0^2, m_2 \odot h_{k+1} \rangle_{\mathcal{H}} = c$ f.s. mit $c := -\sum_{i=1}^k \langle m_2, h_i \rangle_{\mathcal{H}}$, womit ε_0^2 wegen $m_2 \odot h \in \mathcal{H}$ und $m_2 \odot h \neq 0_{\mathcal{H}}$ (siehe Nachweis von Lemma 4.11 (a)) f.s. Werte in einem abgeschlossenen, affinen Unterraum $U \subsetneq \mathcal{H}$ annimmt. Damit gilt die Behauptung in (a) als verifiziert.

(b) folgt aus (a), $\mathcal{Z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}) = \mathcal{X}_{\mathfrak{p}}^2(\mathfrak{p}) - \mathbb{E}(\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}^2(\mathfrak{p}))$ sowie Eigenschaften 2.23 (e).

(c) folgt aus (b) und Definition und Eigenschaften 2.28 (d). □

Da also auch $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p},1} = \alpha \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ für $\mathfrak{p} > 1$ aufgrund der gemachten Voraussetzungen stets eindeutig lösbar ist, können analog zum Fall $\mathfrak{p} = 1$ Schätzer für α in Abhängigkeit der folgenden empirischen Versionen von $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p},1}$ sowie $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ angegeben werden, bei deren Konstruktion sowohl die Bemerkung 4.7 als auch die Definition der Zeitreihe $\mathcal{X}^2(\mathfrak{p})$ beachtet wurde.

Definition und Eigenschaften 4.36. Es sei $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_N$ mit $N \in \mathbb{N}$ und $N > \mathfrak{p} + 1$ eine Stichprobe der FARCH(\mathfrak{p})-Zeitreihe \mathcal{X} mit den Eigenschaften auf S.33 f.

(a) Die empirischen Kovarianzoperatoren $\hat{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{p}} = \hat{\mathcal{C}}_{0, \mathcal{X}^2(\mathfrak{p})}$, definiert durch

$$\hat{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{p}} := \frac{1}{N_{\mathfrak{p}} - 1} \sum_{k=1}^{N_{\mathfrak{p}}} \left(\mathcal{X}_{\mathfrak{p}+k-1}^2(\mathfrak{p}) - \hat{m}_1(\mathcal{X}^2(\mathfrak{p})) \right) \otimes \left(\mathcal{X}_{\mathfrak{p}+k-1}^2(\mathfrak{p}) - \hat{m}_1(\mathcal{X}^2(\mathfrak{p})) \right) \quad (4.69)$$

mit $N_{\mathbf{p}} := N - \mathbf{p}$ und $\hat{m}_1(\mathcal{X}^2(\mathbf{p})) := N_{\mathbf{p}}^{-1} \sum_{i=1}^{N_{\mathbf{p}}} \mathcal{X}_{\mathbf{p}+i-1}^2(\mathbf{p})$, sind zwar nicht notwendigerweise erwartungstreue Schätzer für $\mathfrak{S}_{\mathbf{p}} = \mathcal{C}_{0;\mathcal{X}(\mathbf{p})}$, erfüllen jedoch

$$\|\hat{\mathfrak{S}}_{\mathbf{p}} - \mathfrak{S}_{\mathbf{p}}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathbf{p}}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(N^{-1}). \quad (4.70)$$

(b) Die empirischen Versionen von $\mathfrak{S}_{\mathbf{p},1} = \mathcal{C}_{1;\mathcal{X}^2(\mathbf{p}),\mathcal{X}^2}$ aus (4.66), welche wir aufgrund von $\mathcal{C}_{1;\mathcal{X}(\mathbf{p}),\mathcal{X}} = \mathcal{C}_{1;\mathcal{X}^2(\mathbf{p}),\mathcal{X}^2}$ durch

$$\hat{\mathfrak{S}}_{\mathbf{p},1} := \frac{1}{N_{\mathbf{p}}-1} \sum_{k=1}^{N_{\mathbf{p}}} \left(\mathcal{X}_{k+\mathbf{p}-1}^2(\mathbf{p}) - \hat{m}_1(\mathcal{X}^2(\mathbf{p})) \right) \otimes \left(\mathcal{X}_{k+\mathbf{p}}^2 - \hat{m}_1(\mathcal{X}^2) \right) \quad (4.71)$$

mit $\hat{m}_1(\mathcal{X}^2(\mathbf{p}))$ aus (a) und $\hat{m}_1(\mathcal{X}^2) := N_{\mathbf{p}}^{-1} \sum_{j=1}^{N_{\mathbf{p}}} \mathcal{X}_{\mathbf{p}+j}^2$ definieren, sind nicht notwendigerweise erwartungstreue Schätzer für $\mathfrak{S}_{\mathbf{p},1}$. Es gilt jedoch

$$\|\hat{\mathfrak{S}}_{\mathbf{p},1} - \mathfrak{S}_{\mathbf{p},1}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathbf{p}},\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(N^{-1}). \quad (4.72)$$

Beweis.

(a) Analog zur Argumentation von Satz 4.4 (b) ist $\hat{\mathfrak{S}}_{\mathbf{p}}$ nicht notwendigerweise ein erwartungstreuer Schätzer für $\mathfrak{S}_{\mathbf{p}}$. Aus den Überlegungen im Beweis von Satz 4.4 (b) und der Definition des Schätzers $\hat{\mathfrak{S}}_{\mathbf{p}}$ folgt mit $m_1(\mathcal{X}^2(\mathbf{p})) = \mathbb{E}(\mathcal{X}^2(\mathbf{p}))$ und $\mathcal{Z}_l(\mathbf{p}) = \mathcal{X}_l^2(\mathbf{p}) - m_1(\mathcal{X}^2(\mathbf{p}))$ für alle l außerdem:

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{S}}_{\mathbf{p}} &= \frac{N_{\mathbf{p}}}{N_{\mathbf{p}}-1} \left(m_1(\mathcal{X}^2(\mathbf{p})) - \hat{m}_1(\mathcal{X}^2(\mathbf{p})) \right) \otimes \left(m_1(\mathcal{X}^2(\mathbf{p})) - \hat{m}_1(\mathcal{X}^2(\mathbf{p})) \right) \\ &\quad + \frac{1}{N_{\mathbf{p}}-1} \sum_{k=1}^{N_{\mathbf{p}}} \mathcal{Z}_{\mathbf{p}+k-1}(\mathbf{p}) \otimes \mathcal{Z}_{\mathbf{p}+k-1}(\mathbf{p}), \end{aligned}$$

woraus per Definition von $\hat{\mathfrak{S}}_{\mathbf{p}}$ wiederum folgt (siehe (4.15)):

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathfrak{S}}_{\mathbf{p}} - \mathfrak{S}_{\mathbf{p}}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathbf{p}}}}^2 &\lesssim \left(\frac{N_{\mathbf{p}}}{N_{\mathbf{p}}-1} \right)^2 \left[\left\| \hat{m}_1(\mathcal{X}^2(\mathbf{p})) - m_1(\mathcal{X}^2(\mathbf{p})) \right\|_{\mathcal{H}^{\mathbf{p}}}^4 + N_{\mathbf{p}}^{-2} \|\mathfrak{S}_{\mathbf{p}}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathbf{p}}}}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| N_{\mathbf{p}}^{-1} \left(\sum_{k=1}^{N_{\mathbf{p}}} \mathcal{Z}_{\mathbf{p}+k-1}(\mathbf{p}) \otimes \mathcal{Z}_{\mathbf{p}+k-1}(\mathbf{p}) - \mathfrak{S}_{\mathbf{p}} \right) \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathbf{p}}}}^2 \right]. \end{aligned}$$

Dabei gilt per Definition der Ausdrücke $\hat{m}_1(\mathcal{X}^2(\mathbf{p}))$, $m_1(\mathcal{X}^2(\mathbf{p}))$, $\mathcal{Z}_l(\mathbf{p})$ für alle l sowie von $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}^{\mathbf{p}}}$ und aufgrund der Überlegungen im Nachweis von (4.4):

$$\mathbb{E} \left\| \hat{m}_1(\mathcal{X}^2(\mathbf{p})) - m_1(\mathcal{X}^2(\mathbf{p})) \right\|_{\mathcal{H}^{\mathbf{p}}}^2 = \sum_{k=1}^{\mathbf{p}} N_{\mathbf{p}}^{-2} \sum_{i,j=1}^{N_{\mathbf{p}}} \mathbb{E} \langle \mathcal{Z}_{k+i-1}, \mathcal{Z}_{k+j-1} \rangle_{\mathcal{H}} = O(\mathbf{p} N_{\mathbf{p}}^{-1}).$$

Aus der Definition der Normen $\|\cdot\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathbf{p}}}}$ sowie $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^{\mathbf{p}}}$ und von $\mathfrak{S}_{\mathbf{p}}$ folgt zudem mit einer ONB $(h_{\mathbf{p},j})_j$ von $\mathcal{H}^{\mathbf{p}}$, die durch eine ONB $(h_j)_j$ von \mathcal{H} induziert sei, gemäß Satz 4.4:

$$\begin{aligned} &\left\| N_{\mathbf{p}}^{-1} \left(\sum_{k=1}^{N_{\mathbf{p}}} \mathcal{Z}_{\mathbf{p}+k-1}(\mathbf{p}) \otimes \mathcal{Z}_{\mathbf{p}+k-1}(\mathbf{p}) - \mathfrak{S}_{\mathbf{p}} \right) \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathbf{p}}}}^2 \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\mathbf{p}} \left\| N_{\mathbf{p}}^{-1} \left(\sum_{k=1}^{N_{\mathbf{p}}} \langle \mathcal{Z}_{\mathbf{p}+k-1}, h_l \rangle_{\mathcal{H}} \mathcal{Z}_{\mathbf{p}+k-1}(\mathbf{p}) - \mathbb{E} \left[\langle \mathcal{Z}_{\mathbf{p}+k-1}, h_l \rangle_{\mathcal{H}} \mathcal{Z}_{\mathbf{p}+k-1}(\mathbf{p}) \right] \right) \right\|_{\mathcal{H}^{\mathbf{p}}}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m,n=1}^{\mathfrak{p}} \left\| N_{\mathfrak{p}}^{-1} \left(\sum_{k=1}^{N_{\mathfrak{p}}} \langle \mathcal{Z}_{m+k-1}, h_l \rangle_{\mathcal{H}} \mathcal{Z}_{n+k-1} - \mathbb{E} \left[\langle \mathcal{Z}_{m+k-1}, h_l \rangle_{\mathcal{H}} \mathcal{Z}_{n+k-1} \right] \right) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \sum_{m,n=1}^{\mathfrak{p}} \|\hat{\mathcal{C}}_{n-m;\mathcal{Z}} - \mathcal{C}_{n-m;\mathcal{Z}}\|_{\mathcal{H}}^2 = O(\mathfrak{p}^3 N_{\mathfrak{p}}^{-1}).
\end{aligned}$$

Insgesamt führen (4.65) und $N_{\mathfrak{p}} \sim N$ für jedes feste \mathfrak{p} tatsächlich zu

$$\|\hat{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{p}} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}}}}^2 \lesssim \left(\frac{N_{\mathfrak{p}}}{N_{\mathfrak{p}}-1} \right)^2 \left[O_{\mathbb{P}}(\mathfrak{p}^2 N_{\mathfrak{p}}^{-1}) + O_{\mathbb{P}}(\mathfrak{p} N_{\mathfrak{p}}^{-2}) + O_{\mathbb{P}}(\mathfrak{p}^3 N_{\mathfrak{p}}^{-1}) \right] = O_{\mathbb{P}}(N^{-1}).$$

(b) Auch $\hat{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{p},1}$ ist nach der Argumentation im Beweis von Satz 4.4 (b) nicht notwendigerweise ein erwartungstreuer Schätzer für $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p},1}$ und mit $m_1(\mathcal{X}^2(\mathfrak{p})) = \mathbb{E}(\mathcal{X}^2(\mathfrak{p}))$, $m_1(\mathcal{X}^2) = \mathbb{E}(\mathcal{X}^2)$, $\mathcal{Z}_l(\mathfrak{p}) = \mathcal{X}_l^2(\mathfrak{p}) - m_1(\mathcal{X}^2(\mathfrak{p}))$ und $\mathcal{Z}_l = \mathcal{X}_l^2 - m_1(\mathcal{X}^2)$ für alle l gilt wie in (a):

$$\begin{aligned}
\hat{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{p},1} &= \frac{N_{\mathfrak{p}}}{N_{\mathfrak{p}}-1} \left(m_1(\mathcal{X}^2(\mathfrak{p})) - \hat{m}_1(\mathcal{X}^2(\mathfrak{p})) \right) \otimes \left(m_1(\mathcal{X}^2) - \hat{m}_1(\mathcal{X}^2) \right) \\
&\quad + \frac{1}{N_{\mathfrak{p}}-1} \sum_{k=1}^{N_{\mathfrak{p}}} \mathcal{Z}_{\mathfrak{p}+k-1}(\mathfrak{p}) \otimes \mathcal{Z}_{\mathfrak{p}+k}.
\end{aligned}$$

Demnach gilt per Definition von $\hat{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{p},1}$ sowie $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p},1}$, wegen (4.67) und wegen der Argumentation in Teil (a) für jedes feste \mathfrak{p} :

$$\begin{aligned}
&\|\hat{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{p},1} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{p},1}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}}, \mathcal{H}}}^2 \\
&\lesssim \left(\frac{N_{\mathfrak{p}}}{N_{\mathfrak{p}}-1} \right)^2 \left[\left\| \hat{m}_1(\mathcal{X}^2(\mathfrak{p})) - m_1(\mathcal{X}^2(\mathfrak{p})) \right\|_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}}}^2 \left\| \hat{m}_1(\mathcal{X}^2) - m_1(\mathcal{X}^2) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \right. \\
&\quad \left. + N_{\mathfrak{p}}^{-2} \|\mathfrak{S}_{\mathfrak{p},1}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}}, \mathcal{H}}}^2 + \left\| N_{\mathfrak{p}}^{-1} \left(\sum_{k=1}^{N_{\mathfrak{p}}} \mathcal{Z}_{\mathfrak{p}+k-1}(\mathfrak{p}) \otimes \mathcal{Z}_{\mathfrak{p}+k} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{p},1} \right) \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}}, \mathcal{H}}}^2 \right] \\
&= \left(\frac{N_{\mathfrak{p}}}{N_{\mathfrak{p}}-1} \right)^2 \left[O_{\mathbb{P}}(\mathfrak{p} N_{\mathfrak{p}}^{-2}) + O_{\mathbb{P}}(\sqrt{\mathfrak{p}} N_{\mathfrak{p}}^{-1}) + \sum_{n=1}^{\mathfrak{p}} \|\hat{\mathcal{C}}_{n;\mathcal{Z}}(N_{\mathfrak{p}}) - \mathcal{C}_{n;\mathcal{Z}}\|_{\mathcal{H}}^2 \right] \\
&= \left(\frac{N_{\mathfrak{p}}}{N_{\mathfrak{p}}-1} \right)^2 \left[O_{\mathbb{P}}(\mathfrak{p} N_{\mathfrak{p}}^{-2}) + O_{\mathbb{P}}(\sqrt{\mathfrak{p}} N_{\mathfrak{p}}^{-1}) + O_{\mathbb{P}}(\mathfrak{p}^2 N_{\mathfrak{p}}^{-1}) \right] \\
&= O_{\mathbb{P}}(N^{-1}). \quad \square
\end{aligned}$$

Es sei $(\mathbf{c}_{\mathfrak{p},j})_{j \in \mathbb{N}}$ die Eigenfunktionenfolge mit zugehöriger o.B.d.A. monoton fallender Eigenwertfolge $(c_{\mathfrak{p},j})_{j \in \mathbb{N}}$ von $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}} = \mathcal{C}_{0;\mathcal{Z}(\mathfrak{p})}$ und $(\hat{\mathbf{c}}_{\mathfrak{p},j})_{j \in \mathbb{N}}$ sei die Eigenfunktionenfolge mit zugehöriger o.B.d.A. monoton fallender Eigenwertfolge $(\hat{c}_{\mathfrak{p},j})_{j \in \mathbb{N}}$ von $\hat{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{p}}$. Dann setzen wir für α folgenden Schätzer mit $K = K_N \in \mathbb{N}$ und einer Nullfolge $(\vartheta_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \infty)$ an:

$$\hat{\alpha} := \hat{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{p},1} \hat{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{p}}^{\dagger} \prod_{\hat{c}_{\mathfrak{p},1}}^{\hat{c}_{\mathfrak{p},K}} = \hat{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{p},1} \hat{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{p}} (\hat{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{p}}^2 + \vartheta_N \mathbb{I}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}}})^{-1} \prod_{\hat{c}_{\mathfrak{p},1}}^{\hat{c}_{\mathfrak{p},K}}. \quad (4.73)$$

Wir können nun das folgende Konsistenzresultat angeben.

Satz 4.37. Für ein $\mathfrak{p} > 1$ sei $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine \mathcal{H} -wertige FARCH(\mathfrak{p})-Zeitreihe mit den Eigenschaften auf S.33 f., deren Parameter δ , sowie $\alpha_1, \dots, \alpha_{\mathfrak{p}}$ die Annahme 4.8 und deren Zeitreihe $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ aus Innovationen (4.2) sowie die Annahme 4.9 erfüllen. Ferner erfülle $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ die Annahme 4.18, $(\Phi_{\mathfrak{p},ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ sei die durch die Eigenfunktionenfolgen $(\mathfrak{c}_{\mathfrak{p},j})_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}^{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ sowie $(\mathfrak{c}_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ von $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_{0;\mathcal{X}}$ induzierte ONB von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}},\mathcal{H}}$, es gelte $\alpha = (\alpha_1 \cdots \alpha_{\mathfrak{p}})$ und $\hat{\alpha}$ seien die Schätzer aus (4.73) mit $\vartheta_N = O(N^{-1/2})$.

(a) Dann gilt für jedes feste $K \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{I}_{\mathfrak{p},K} := \{\Phi_{\mathfrak{p},ij} | 1 \leq i, j \leq K\}$:

$$\left\| \hat{\alpha} - \prod_{\mathcal{I}_{\mathfrak{p},K}} \alpha \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}},\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(N^{-1}). \quad (4.74)$$

(b) Ferner, falls das Tupel $(\alpha, (\Phi_{\mathfrak{p},ij})_{i,j})$ die Annahme 4.24 für ein $\beta > 0$ erfülle, gilt für jede Folge $(K_N) \subseteq \mathbb{N}$ mit $K = K_N = \Xi(1, N)$ und $c_{\mathfrak{p},K}^{-4} K^{2\beta+1} = O(N)$:

$$\left\| \hat{\alpha} - \alpha \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}},\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta}). \quad (4.75)$$

Beweis.

(a) Aus Satz 2.14, (4.68), (4.72) und den Überlegungen im Beweis von Satz 4.28 folgt mit $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}^{\dagger} := \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}^2 + \vartheta_N \mathbb{I}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}}})^{-1}$ für alle K, N :

$$\begin{aligned} \left\| \hat{\alpha} - \prod_{\mathcal{I}_{\mathfrak{p},K}} \alpha \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}},\mathcal{H}}}^2 &\lesssim \left\| \hat{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{p},1} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{p},1} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}},\mathcal{H}}}^2 \left\| \hat{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{p}}^{\dagger} \prod_{\hat{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{p},1}}^{\hat{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{p},K}} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}}}}^2 + \left\| \mathfrak{S}_{\mathfrak{p},1} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}},\mathcal{H}}}^2 \left\| \hat{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{p}}^{\dagger} \prod_{\hat{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{p},1}}^{\hat{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{p},K}} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}^{\dagger} \prod_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{p},1}}^{\mathfrak{c}_{\mathfrak{p},K}} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}}}}^2 \\ &\quad + \left\| \mathfrak{S}_{\mathfrak{p},1} \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}^{\dagger} \prod_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{p},1}}^{\mathfrak{c}_{\mathfrak{p},K}} - \prod_{\mathcal{I}_{\mathfrak{p},K}} \alpha \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}},\mathcal{H}}}^2 \\ &\lesssim O_{\mathbb{P}}(N^{-1}) \left\| \hat{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{p}}^{\dagger} \prod_{\hat{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{p},1}}^{\hat{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{p},K}} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}}}}^2 + \left\| \hat{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{p}}^{\dagger} \prod_{\hat{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{p},1}}^{\hat{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{p},K}} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}^{\dagger} \prod_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{p},1}}^{\mathfrak{c}_{\mathfrak{p},K}} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}}}}^2 + \left\| \prod_{\mathcal{I}_{\mathfrak{p},K}} \alpha \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}^{\dagger} \prod_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{p},1}}^{\mathfrak{c}_{\mathfrak{p},K}} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}},\mathcal{H}}}^2 \\ &\quad + \left\| \prod_{\mathcal{I}_{\mathfrak{p},K}} \alpha \left[\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}^{\dagger} \prod_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{p},1}}^{\mathfrak{c}_{\mathfrak{p},K}} - \mathbb{I}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}}} \right] \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}},\mathcal{H}}}^2 \\ &=: O_{\mathbb{P}}(N^{-1}) \cdot T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Term T_1 : Analog zu den Umformungen bei T_1 in Satz 4.28 gilt für jedes feste K :

$$\left\| \hat{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{p}}^{\dagger} \prod_{\hat{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{p},1}}^{\hat{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{p},K}} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(c_{\mathfrak{p},K}^{-2}) = O_{\mathbb{P}}(1). \quad (4.77)$$

Term T_2 : Aufgrund von Lemma 4.1, (4.70), Korollar 4.13, Lemma 4.21 und den Überlegungen bei der Herleitung der Rate von Term T_2 in Satz 4.28 gilt für jedes feste K :

$$\left\| \hat{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{p}}^{\dagger} \prod_{\hat{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{p},1}}^{\hat{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{p},K}} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}^{\dagger} \prod_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{p},1}}^{\mathfrak{c}_{\mathfrak{p},K}} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{p}}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(c_{\mathfrak{p},K}^{-4} N^{-1}) + O_{\mathbb{P}}(c_{\mathfrak{p},K}^{-4} K N^{-1}) = O_{\mathbb{P}}(N^{-1}). \quad (4.78)$$

Term T_3 : Da $(\Phi_{p,ij})_{i,j}$ eine durch die ONB $(\mathbf{c}_{p,k})_k$ von \mathcal{H}^p sowie $(\mathbf{c}_l)_l$ von \mathcal{H} induzierte ONB von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}^p, \mathcal{H}}$ ist, gilt für $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}^p, \mathcal{H}}$ mit $\mathcal{J}_{p,K}^c := \{\Phi_{p,ij} | i, j > K\}$, wie bei der Herleitung der Rate T_3 in Satz 4.28 für alle $k, K \in \mathbb{N}$:

$$\prod_{\mathcal{J}_{p,K}^c} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{c}_{p,k}) = \mathbf{1}_{\mathbb{N}_{>K}}(k) \sum_{i>K} \langle \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{c}_{p,k}), \mathbf{c}_i \rangle_{\mathcal{H}} \mathbf{c}_i,$$

woraus wiederum für jedes $K \in \mathbb{N}$ folgt:

$$\left\| \prod_{\mathcal{J}_{p,K}^c} \boldsymbol{\alpha} \prod_{\mathbf{c}_{p,1}}^{\mathbf{c}_{p,K}} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^p, \mathcal{H}}}^2 = \sum_{j=1}^K \mathbf{1}_{\mathbb{N}_{>K}}(j) \left[\frac{c_{p,j}^2}{c_{p,j}^2 + \vartheta_N} \right]^2 \left\| \sum_{i>K} \langle \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{c}_{p,k}), \mathbf{c}_i \rangle_{\mathcal{H}} \mathbf{c}_i \right\|_{\mathcal{H}}^2 = 0. \quad (4.79)$$

Term T_4 : Aus $\prod_{\mathcal{J}_{p,K}} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{c}_{p,k}) = \mathbf{1}_{\mathbb{N}_{\leq K}}(k) \sum_{i>K} \langle \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{c}_{p,k}), \mathbf{c}_i \rangle_{\mathcal{H}} \mathbf{c}_i$ für alle $k, K, \vartheta_N = O(N^{-1/2})$ und der Argumentation bei der Herleitung der Rate von T_4 in Satz 4.28 folgt für feste K :

$$\left\| \prod_{\mathcal{J}_{p,K}} \boldsymbol{\alpha} \left[\prod_{\mathbf{c}_{p,1}}^{\mathbf{c}_{p,K}} - \mathbb{I}_{\mathcal{H}^p} \right] \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^p, \mathcal{H}}}^2 \leq \vartheta_N^2 c_{p,K}^{-4} \|\boldsymbol{\alpha}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^p, \mathcal{H}}}^2 = O(N^{-1}). \quad (4.80)$$

Setzen wir die Raten (4.77) bis (4.80) in (4.76) ein, so führt dies, wie behauptet, zu (4.74).

(b) Aus $\boldsymbol{\alpha} = \prod_{\mathcal{J}_{p,K}} \boldsymbol{\alpha} + \prod_{\mathcal{J}_{p,K}^c} \boldsymbol{\alpha}$, $\|\prod_{\mathcal{J}_{p,K}^c} \boldsymbol{\alpha}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^p, \mathcal{H}}}^2 = O(K^{-2\beta})$ nach Annahme 4.24 für ein $\beta > 0$, der Argumentation in (a), $\vartheta_N = O(N^{-1/2})$ und $c_{p,K}^{-4} K^{2\beta+1} = O(N)$ folgt

$$\begin{aligned} \|\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^p, \mathcal{H}}}^2 &= O_{\mathbb{P}}(c_{p,K}^{-4} K N^{-1}) + \vartheta_N^2 c_{p,K}^{-4} + O(K^{-2\beta}) \\ &= O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta}). \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung 4.38. Zwar stimmen die Voraussetzungen in Satz 4.37 nicht eins zu eins mit denen von Satz 4.30 überein, jedoch sind sowohl die vorausgesetzten Raten für die angegebenen Folgen als auch die Raten im Endresultat identisch, womit sich die Beispiele 4.31 für $p = 1$ unmittelbar auf $p > 1$ in Satz 4.37 übertragen lassen. \blacklozenge

4.4 Operatorschätzung im FGARCH-Modell

In diesem Abschnitt thematisieren wir die Schätzung der Operatoren einer \mathcal{H} -wertigen FGARCH(p, q)-Zeitreihe $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Im Vorbereitungsteil analysieren wir das asymptotische Verhalten bestimmter Kovarianz- und Autokreuzkovarianzoperatoren, befassen uns danach mit der Schätzung der Operatoren in der Darstellung der durch \mathcal{X} induzierten FARMA(r, q)-Zeitreihe $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (\mathcal{X}_k^2 - m_2)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit $r := \max(p, q)$, $m_2 = \mathbb{E}(\mathcal{X}_0)$, sowie der Zeitreihe aus Innovationen $\boldsymbol{\nu} = (\nu_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (\mathcal{X}_k^2 - \sigma_k^2)_{k \in \mathbb{Z}}$ (siehe Abschnitt 4.1.2) als invertierbare Zeitreihe (siehe Abschnitt 2.5.2) und geben der Vollständigkeit halber Konsistenzresultate für die quadratischen Schätzfehler der Schätzer für die Operatoren in der Darstellung von \mathcal{Z} als linearem Prozess bzgl. $\boldsymbol{\nu}$ an. Von den Resultaten bei der Schätzung der Operatoren in der invertierbaren Darstellung werden wir anschließend bei der Schätzung der Operatoren im FGARCH(1, 1)-Modell, und darauf aufbauend bei der Schätzung der Operatoren im FGARCH(p, q)-Modell mit $r > 1$ Gebrauch machen.

4.4.1 Vorbereitung

Wie bereits erwähnt, beschäftigen wir uns hier mit der Schätzung der Operatoren in der invertierbaren Darstellung und anschließend in der Darstellung als linearen Prozess von $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Dabei analysieren wir zunächst das asymptotische Verhalten sowohl von Kovarianzoperatoren, seinen Eigenwerten und seinen Eigenfunktionen als auch von Autokreuzkovarianzoperatoren, wobei diese Größen von einer Folge $(L_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $L = L_N = \Xi(1, N)$, statt von einem festen \mathfrak{p} , abhängen.

4.4.1.1 Das asymptotische Verhalten bestimmter Kovarianz- und Autokreuzkovarianzoperatoren bei wachsender Dimension

Für die Herleitung der Konvergenzraten für wachsendes $L = L_N$, statt festem $\mathfrak{p} \in \mathbb{N}$ wie in Abschnitt 4.3.2, ist zu beachten, dass auch die Kovarianzoperatoren $\mathfrak{S}_L = \mathcal{C}_{0; \mathcal{Z}(L)}$, die zugehörigen Eigenwerte $c_{L,j}$ und Eigenfunktionen $\mathfrak{c}_{L,j}$ mit $\mathcal{Z}(L) = (\mathcal{Z}_k(L))_{k \in \mathbb{Z}} := ((\mathcal{Z}_k, \mathcal{Z}_{k-1}, \dots, \mathcal{Z}_{k-L+1})^T)_{k \in \mathbb{Z}}$ und auch die Autokreuzkovarianzoperatoren $\mathfrak{S}_{L,h} = \mathcal{C}_{h; \mathcal{Z}(L), \mathcal{Z}}$ für alle h, j vom Stichprobenumfang N abhängen. Da wegen (4.65)

$$\|\mathfrak{S}_L\|_{\mathcal{N}_{\mathcal{H}^L}} = L \mathbb{E} \|\mathcal{Z}_0\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (4.81)$$

gilt, gilt nämlich für die Eigenwerte $c_{L,j}$ von \mathfrak{S}_L für alle j :

$$c_{L,j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} c_{L,j} = \|\mathfrak{S}_L\|_{\mathcal{N}_{\mathcal{H}^L}} \propto L. \quad (4.82)$$

Ferner gilt für die Autokreuzkovarianzoperatoren wegen (4.67) für alle h

$$\|\mathfrak{S}_{L,h}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}} \leq \sqrt{L} \mathbb{E} \|\mathcal{Z}_0\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.83)$$

Des Weiteren erhalten wir das nachfolgende Resultat für die quadratischen Schätzfehler der Schätzer für die Kovarianzoperatoren \mathfrak{S}_L und die Autokreuzkovarianzoperatoren $\mathfrak{S}_{L,1}$ bei wachsendem $L = L_N$.

Korollar 4.39. Es sei $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_N$ mit $N \in \mathbb{N}$ eine Stichprobe der FGARCH($\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$)-Zeitreihe \mathcal{X} mit den Eigenschaften auf S.33 f., und $(L_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ sei eine Folge mit der Eigenschaft $L = L_N = \Xi(1, N)$. Dann gilt mit $\hat{\mathfrak{S}}_L$ aus (4.69)

$$\|\hat{\mathfrak{S}}_L - \mathfrak{S}_L\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^L}}^2 = O_{\mathbb{P}}(L^3 N^{-1}), \quad (4.84)$$

und für $\mathfrak{S}_{L,1}$ aus (4.71) gilt

$$\|\hat{\mathfrak{S}}_{L,1} - \mathfrak{S}_{L,1}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(L^2 N^{-1}). \quad (4.85)$$

Beweis. Die behaupteten Raten folgen aus $N_L := N - L \sim N$ wegen $L = L_N = \Xi(1, N)$, (4.8) und den Überlegungen im Nachweis von Definition und Eigenschaften 4.36. \square

Für die Schätzfehler der Schätzer für die Eigenwerte von \mathfrak{S}_L gilt aufgrund von (4.84) sowie $|\hat{c}_{L,j} - c_{L,j}| \leq \|\hat{\mathfrak{S}}_L - \mathfrak{S}_L\|_{\mathcal{H}^L}^2$ für alle j gemäß (4.18)

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} |\hat{c}_{L,j} - c_{L,j}|^2 = O_{\mathbb{P}}(L^3 N^{-1}). \quad (4.86)$$

Falls die Operatoren \mathfrak{S}_L die Annahme 4.18 für alle $L \in \mathbb{N}$ erfüllen, gilt nach Lemma 4.16 sowie Korollar 4.21 außerdem

$$\|\hat{\mathfrak{c}}_{L,j}''' - \mathfrak{c}_{L,j}\|_{\mathcal{H}^L}^2 = O_{\mathbb{P}}(L^3 N^{-1}) \quad (4.87)$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ und

$$\sup_{j \leq K} \|\hat{\mathfrak{c}}_{L,j}''' - \mathfrak{c}_{L,j}\|_{\mathcal{H}^L}^2 = O_{\mathbb{P}}(c_{L,K}^{-2} L^3 N^{-1}) \quad (4.88)$$

für jede Folge $(K_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $K = K_N = \Xi(1, N)$, wobei $\hat{\mathfrak{c}}_{L,j}'''$ für die modifizierten j -te Eigenfunktionen von $\hat{\mathfrak{S}}_L$ aus (4.26) steht.

Bemerkung 4.40. Die Konvergenzraten (4.84), (4.86) sowie (4.87) bzw. (4.88) sind, isoliert betrachtet, nur im Fall $L = L_N = o(N^{1/2})$ sowie $L = o(N^{1/3})$ bzw. $c_{L,K}^{-2} L^3 = o(N)$ sinnvoll. In Lemma 4.46 (b) wird jedoch nur $L = L_N = o(N)$ verlangt und in Beispiel 4.52 wird deutlich, dass es Szenarien gibt, in denen es vorteilhaft ist, wenn L_N zumindest so schnell wächst wie $N^{1/2}$ (bspw. im Fall $b = 2 = \beta$). ♦

Es stellt sich außerdem die Frage, ob die Operatoren $\mathfrak{S}_L = \mathcal{C}_{0;\mathcal{Z}(L)}$ für alle L bei der vorliegenden, durch die FGARCH($\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$)-Zeitreihe \mathcal{Z} induzierten FARMA($\mathfrak{r}, \mathfrak{q}$)-Zeitreihe \mathcal{Z} , injektiv sind und sie somit Teil (a) der Annahme 4.18 erfüllen. Diese Frage lässt sich im folgenden Korollar mit ja beantworten.

Korollar 4.41. Die Parameter δ und $\alpha_1, \dots, \alpha_{\mathfrak{p}}, \beta_1, \dots, \beta_{\mathfrak{q}}$ der \mathcal{H} -wertigen FGARCH($\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$)-Zeitreihe \mathcal{Z} erfüllen die Annahme 4.8, und deren \mathcal{H} -wertige Zeitreihe $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ aus Innovationen erfülle (4.2). Erfüllt $(\varepsilon_k)_k$ zusätzlich Annahme 4.9, so gilt für alle $L \in \mathbb{N}$:

- (a) Es gibt keinen abgeschlossenen Unterraum $U \subsetneq \mathcal{H}^L$ mit $\mathbb{P}(\mathcal{Z}(L) \in U) = 1$.
- (b) Der Kovarianzoperator $\mathfrak{S}_L = \mathcal{C}_{0;\mathcal{Z}(L)}$ ist injektiv.

Beweis. Beide Teile folgen aus Lemma 4.11 und Lemma 4.35, weil im Nachweis beider Lemmata zwar $\mathcal{Z}_k = \mathcal{X}_k^2 - m_2 = \sigma_k^2 \odot \varepsilon_k^2 - m_2$ f.s., jedoch nicht die konkrete Gestalt von \mathcal{X}_k eingegangen sind und die Länge L der Vektoren $\mathcal{Z}_k(L) := (\mathcal{Z}_k, \mathcal{Z}_{k-1}, \dots, \mathcal{Z}_{k-L+1})^T$ im Nachweis von Lemma 4.35 irrelevant ist. □

Nun geben wir eine obere Schranke für das asymptotische Verhalten von $(c_{L,K})_N$ an, wenn $(K_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ und $(L_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ gegen unendlich streben. Dieses asymptotische Verhalten ist bislang unbekannt, obwohl eine obere Schranke für das asymptotische Verhalten von $(c_{L,K})_N$ für $L = L_N \rightarrow \infty$ bei festem K und für $K = K_N \rightarrow \infty$ bei festem L bekannt ist.

Korollar 4.42. Es seien $(K_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ und $(L_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ Folgen mit $K = K_N \rightarrow \infty$ und $L = L_N \rightarrow \infty$. Dann gilt für die Eigenwerte der Kovarianzoperatoren \mathfrak{S}_L

$$c_{L,K} = O(K^{-1}L). \quad (4.89)$$

Fordern wir zusätzlich $c_{L,K} = \Omega(\sqrt{L^3 N^{-1}})$, was wegen (4.89) nur für Folgen $(K_N)_{N \in \mathbb{N}}$ mit $K = O(\sqrt{L^{-1}N})$ der Fall ist, so gilt außerdem

$$\hat{c}_{L,K} = O_P(c_{L,K}) \quad \text{und} \quad c_{L,K} = O_P(\hat{c}_{L,K}). \quad (4.90)$$

Beweis. Wegen (4.82) und o.B.d.A. $c_{L,1} \geq \dots \geq c_{L,K}$ für feste K, L gilt

$$L \propto \sum_{j=1}^{\infty} c_{L,j} \geq \sum_{j=1}^K c_{L,j} \geq K c_{L,K},$$

woraus (4.89) folgt. Des Weiteren folgt (4.90) aus $c_{L,K} = \Omega(\sqrt{L^3 N^{-1}})$, (4.86) und der Argumentation im Beweis von Korollar 4.13 (b). \square

4.4.1.2 Operatorschätzung in invertierbarer Darstellung

Hier befassen wir uns mit der Schätzung der Operatoren in der invertierbaren Darstellung (siehe (2.37)) der durch die FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihe $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit starkem weißen Rauschen $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ induzierten FARMA(\mathbf{r}, \mathbf{q})-Zeitreihe $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (\mathcal{X}_k^2 - m_2)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit halb-starkem weißen Rauschen $\boldsymbol{\nu} = (\nu_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (\mathcal{X}_k^2 - \sigma_k^2)_{k \in \mathbb{Z}}$.

Dabei ist zu klären, ob die Zeitreihe \mathcal{Z} überhaupt invertierbar ist. Da Invertierbarkeit eine Eigenschaft linearer Prozesse ist (siehe Definition und Eigenschaften 2.35), muss zuerst nachgewiesen werden, dass es sich bei \mathcal{Z} überhaupt um einen linearen Prozess bzgl. $\boldsymbol{\nu}$ handelt. Für den Nachweis, dass \mathcal{Z} mit

$$\mathcal{Z}_k = \nu_k + \sum_{i=1}^{\mathbf{r}} \xi_i(\mathcal{Z}_{k-i}) + \sum_{j=1}^{\mathbf{q}} \eta_j(\nu_{k-j}) \quad (4.91)$$

f.s. für alle k (siehe Abschnitt 4.1.2) ein linearer Prozess bzgl. $\boldsymbol{\nu}$ ist, verwenden wir die in [28] aufgestellte Darstellung (ähnlich wie im FARCH(\mathbf{p})-Modell mit $\mathbf{p} > 1$):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_k \\ \mathcal{Z}_{k-1} \\ \vdots \\ \mathcal{Z}_{k-\mathbf{r}+2} \\ \mathcal{Z}_{k-\mathbf{r}+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \nu_k \\ 0_{\mathcal{H}} \\ \vdots \\ 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \xi_{\mathbf{r}} \\ \mathbb{I}_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} & \cdots & \cdots & 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} \\ 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} & \mathbb{I}_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} & \cdots & 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} & \cdots & 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} & \mathbb{I}_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_{k-1} \\ \mathcal{Z}_{k-2} \\ \vdots \\ \mathcal{Z}_{k-\mathbf{r}+1} \\ \mathcal{Z}_{k-\mathbf{r}} \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{\mathbf{q}} \begin{bmatrix} \eta_j & 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} & \cdots & \cdots & 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} \\ 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} & 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} & \cdots & \cdots & \cdots & 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{k-j} \\ 0_{\mathcal{H}} \\ \vdots \\ 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{Z}_k(\mathbf{r}) = \tilde{\nu}_k(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\Xi}(\mathcal{Z}_{k-1}(\mathbf{r})) + \sum_{j=1}^{\mathbf{q}} \mathbf{H}_j(\tilde{\nu}_{k-j}(\mathbf{r})), \end{aligned} \quad (4.92)$$

wobei $\boldsymbol{\Xi}$ und \mathbf{H}_j für $j = 1, \dots, \mathbf{q}$ per Definition Elemente von $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}^{\mathbf{r} \times \mathbf{r}}$ und nach Lemma 2.16 auch von $\mathcal{L}_{\mathcal{H}^{\mathbf{r}}}$ sind. Damit ist $\mathcal{Z}(\mathbf{r}) := (\mathcal{Z}_k(\mathbf{r}))_{k \in \mathbb{Z}}$ eine $\mathcal{H}^{\mathbf{r}}$ -wertige FARMA($1, \mathbf{q}$)-Zeitreihe mit Operatoren $\boldsymbol{\Xi}, \mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_{\mathbf{r}}$ und Zeitreihe aus Innovationen $\tilde{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{r}) = (\tilde{\nu}_k(\mathbf{r}))_{k \in \mathbb{Z}}$.

Nun geben wir eine hinreichende Bedingung an, sodass \mathcal{Z} ein zentrierter, linearer Prozess bzgl. $\boldsymbol{\nu}$, und dieser unter zusätzlichen Voraussetzungen, sogar invertierbar ist.

Lemma 4.43. *Es sei $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit der Darstellung (4.91) f.s. für alle k die durch die FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihe $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit starkem weißen Rauschen $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ induzierte FARMA(\mathbf{r}, \mathbf{q})-Zeitreihe mit halb-starkem weißen Rauschen $\nu = (\nu_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Des Weiteren seien die Voraussetzungen von Lemma 4.11 erfüllt; es sei $(\mathbf{v}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ die Eigenfunktionenfolge des Kovarianzoperators $\mathcal{C}_{0;\nu}$ und für Ξ aus (4.92) gelte $\|\Xi^{j_0}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^{\mathbf{r}}}} < 1$ für ein $j_0 \in \mathbb{N}$. Außerdem erfülle ε (4.2) sowie die Annahme 4.9, und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$ gelte sowohl $\det(A_k(z)) \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, wobei $A_k(z)$ eine \mathbb{C} -wertige $k \times k$ -Matrix mit den Einträgen*

$$(A_k(z))_{mn} := \sum_{j=0}^q z^j \langle \eta_j(\mathbf{v}_m), \mathbf{v}_n \rangle_{\mathcal{H}} \quad (4.93)$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}_{\leq k}$ sei, als auch

$$\sum_{j=1}^q z^j \|\eta_j\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} \neq 1. \quad (4.94)$$

Dann ist \mathcal{Z} ein zentrierter, linearer, invertierbarer Prozess bzgl. ν , d.h. für alle k gilt

$$\mathcal{Z}_k := \nu_k + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(\nu_{k-i}) \quad (4.95)$$

f.s., wobei $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ eine Folge von Operatoren mit $\sum_{i=1}^{\infty} \|\psi_i\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} < \infty$ sei, und

$$\mathcal{Z}_k = \nu_k + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i(\mathcal{Z}_{k-i}) \quad (4.96)$$

f.s., wobei $(\pi_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ eine Folge von Operatoren mit $\sum_{i=1}^{\infty} \|\pi_i\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} < \infty$ sei.

Beweis. Aus $\|\Xi^{j_0}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^{\mathbf{r}}}} < 1$ für ein $j_0 \in \mathbb{N}$ folgt für die Zeitreihe $\mathcal{Z}(\mathbf{r}) = (\mathcal{Z}_k(\mathbf{r}))_{k \in \mathbb{Z}}$ aus (4.92) gemäß [28], Theorem 3.8 mit $\eta_0 := \mathbb{I}_{\mathcal{H}}$ und $\Xi^0 := \mathbb{I}_{\mathcal{H}^{\mathbf{r}}}$ f.s. für alle k :

$$\mathcal{Z}_k(\mathbf{r}) := \tilde{\nu}_k(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^{q-1} \left(\sum_{j=0}^i \Xi^{i-j} \mathbf{H}_j \right) (\tilde{\nu}_{k-i}(\mathbf{r})) + \sum_{i=q}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^q \Xi^{i-j} \mathbf{H}_j \right) (\tilde{\nu}_{k-i}(\mathbf{r})),$$

womit für die erste Komponente von $\mathcal{Z}_k(\mathbf{r})$ per Definition von $\tilde{\nu}_k(\mathbf{r})$ aus (4.92) für alle k und den operatorwertigen Matrizen Ξ sowie $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_q$ aus (4.92) f.s. für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\mathcal{Z}_k := \nu_k + \sum_{i=1}^{q-1} \sum_{j=0}^i \left(\Xi^{i-j} \mathbf{H}_j \right)_{11} (\nu_{k-i}) + \sum_{i=q}^{\infty} \sum_{j=0}^q \left(\Xi^{i-j} \mathbf{H}_j \right)_{11} (\nu_{k-i}).$$

Da $\|\Xi^{j_0}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^{\mathbf{r}}}} < 1$ für ein $j_0 \in \mathbb{N}$ nach [7], Lemma 3.1 äquivalent zu $\|\Xi^j\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^{\mathbf{r}}}} < ab^j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ für ein $a > 0$ und ein $b \in (0, 1)$ ist, gilt nach der Definition der hier angegebenen Operatoren, wegen elementarer Umformungen und $\|\eta_j\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} \leq c$ für jedes j für ein $c > 0$

$$\left\| \left(\Xi^{i-j} \mathbf{H}_j \right)_{11} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} \leq \|\Xi^{i-j} \mathbf{H}_j\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^{\mathbf{r}}}} < ab^{i-j} \|\mathbf{H}_j\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^{\mathbf{r}}}} \leq acb^{i-j}$$

für alle i, j , woraus wiederum folgt:

$$\sum_{i=1}^{q-1} \left\| \sum_{j=0}^i \left(\Xi^{i-j} \mathbf{H}_j \right)_{11} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} + \sum_{i=q}^{\infty} \left\| \sum_{j=0}^q \left(\Xi^{i-j} \mathbf{H}_j \right)_{11} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} \leq ac \sum_{j=1}^q b^{-j} \sum_{i=1}^{\infty} b^i < \infty.$$

Weil $\boldsymbol{\nu} = (\nu_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ein halb-starkes weißes Rauschen ist, ist $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ nach Definition und Eigenschaften 2.35 ein zentrierter, linearer Prozess bzgl. $\boldsymbol{\nu} = (\nu_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit der Darstellung (4.95), wenn $\psi_i := \sum_{j=0}^i (\Xi^{i-j} \mathbf{H}_j)_{11}$ für alle $i \in \mathbb{N}_{< \mathfrak{q}}$ und $\psi_i := \sum_{j=0}^{\mathfrak{q}} (\Xi^{i-j} \mathbf{H}_j)_{11}$ für alle $i \in \mathbb{N}_{\geq \mathfrak{q}}$ gilt. Aus der Argumentation in [7], S.187 f., Satz 2.36 und der Tatsache, dass alle Eigenwerte des nach Lemma 4.11 injektiven Kovarianzoperators positiv sind, folgt außerdem, dass \mathcal{Z} invertierbar ist. \square

Das folgende Beispiel erfüllt die Voraussetzungen in Lemma 4.43.

Beispiel 4.44. Für die Operatoren $\alpha_1, \dots, \alpha_{\mathfrak{p}}, \beta_1, \dots, \beta_{\mathfrak{q}} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ im FGARCH($\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$)-Modell mit $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathbb{N}$ gelte nachfolgend $\|\alpha_i\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} \leq c$ sowie $\|\beta_j\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} \leq c$ für alle i, j für ein hinreichend kleines $c \in (0, \frac{1}{\mathfrak{q}})$ und es gelte $\beta_j = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{j,n} (\mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_n)$ für alle j , wobei $(\mathbf{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für die Eigenfunktionfolge des Kovarianzoperators $\mathcal{C}_{0, \boldsymbol{\nu}}$ stehe.

Für die Einträge der Matrix $\Xi^{\mathfrak{r}} := (\xi_{ij}^{[\mathfrak{r}]})_{i,j=1, \dots, \mathfrak{r}}$ mit Ξ aus (4.92) lässt sich zeigen:

$$\xi_{\mathfrak{r}-i, j}^{[\mathfrak{r}]} = \xi_{j+1} + \sum_{k=1}^i \xi_k \xi_{\mathfrak{r}-i+k, j}^{[\mathfrak{r}]}$$

für $i = 1, \dots, \mathfrak{r} - 1, j = 1, \dots, \mathfrak{r}$ mit $\xi_{\mathfrak{r}j}^{[\mathfrak{r}]} = \xi_j$ für $j = 1, \dots, \mathfrak{r}$ sowie $\xi_{\mathfrak{r}+1} := 0_{\mathcal{H}}$. Folglich gilt per Definition von $\xi_1, \dots, \xi_{\mathfrak{r}}$

$$\|\Xi^{\mathfrak{r}}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{r}}}}^2 \leq \mathfrak{r}^2 \sum_{i,j=1}^{\mathfrak{r}} \|\xi_{ij}^{[\mathfrak{r}]}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^2 \leq \mathfrak{r}^4 \max_{1 \leq i,j \leq \mathfrak{r}} \|\xi_{ij}^{[\mathfrak{r}]}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^2,$$

woraus wegen $\|\alpha_i\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} \leq c$ und $\|\beta_j\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} \leq c$ für alle i, j für ein hinreichend kleines c $\|\Xi^{\mathfrak{r}}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{r}}}} < 1$ folgt. Aus $\beta_j = -\eta_j$ und $\sum_{j=1}^{\mathfrak{q}} \|\beta_j\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} < 1$ folgt außerdem (4.94) für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$. Ferner gilt wegen $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{j,n} (\mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_n)$ für alle j , $\beta_{j,n} = -\eta_{j,n}$ für alle j, n mit $\eta_{0,n} := 1$ für alle n sowie wegen $1 > \sum_{j=1}^{\mathfrak{q}} \|\beta_j\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} = \sum_{j=1}^{\mathfrak{q}} |\eta_{j,n}|$ für die in Lemma 4.43 definierten Matrizen $A_k(z)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$:

$$\det(A_k(z)) = \prod_{m=1}^k \sum_{j_m=0}^{\mathfrak{q}} z^{j_m} \eta_{j_m, m} \neq 0. \quad \blacklozenge$$

Schließlich leiten wir die Schätzer für die Operatoren π_i in (4.96) für alle i her. Dabei fordern wir aus beweistechnischen Gründen neben der Gültigkeit der Voraussetzungen von Lemma 4.43, dass π_i für alle i Element von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ ist und $\sum_{i=1}^{\infty} \|\pi_i\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}} < \infty$ gilt. Unter diesen und zusätzlichen Voraussetzungen lässt sich die orthogonale Projektion von $\boldsymbol{\pi}_L := (\pi_1 \cdots \pi_L) \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}$ auf $\mathcal{J}_{L,K} := \overline{\text{lin}\{\Phi_{L,ij} | i, j \leq K\}}$, d.h. $\prod_{\mathcal{J}_{L,K}} \boldsymbol{\pi}_L$, mit $K, L \in \mathbb{N}$ und jede Komponente von $\prod_{\mathcal{J}_{L,K}} \boldsymbol{\pi}_L$ konsistent schätzen, wobei $(\Phi_{L,ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ für die durch die Eigenfunktionfolge $(\mathbf{c}_{L,k})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}^L$ von $\mathfrak{S}_L = \mathcal{C}_{0, \mathcal{Z}(L)}$ und die Eigenfunktionfolge $(\mathbf{c}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ von $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_{0, \mathcal{Z}}$ induzierte ONB von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}$ steht. Unter gewissen Glattheitsannahmen der Operatoren $\boldsymbol{\pi}_L$ für alle L werden wir im Anschluss ein Konsistenzresultat für den Operator $\boldsymbol{\pi}_L$ angeben, ohne ihn auf einen endlichdimensionalen Unterraum zu projizieren. Für den Nachweis dieser Konsistenzresultate benötigen wir das folgende Lemma, welches als Yule-Walker-Gleichung mit einem Rest interpretiert werden kann.

Lemma 4.45. *Es gelten die Voraussetzungen von Lemma 4.43. Dann gilt für alle $L \in \mathbb{N}$ mit $\boldsymbol{\pi}_L := (\pi_1 \cdots \pi_L)$:*

$$\mathfrak{S}_{L,1} = \boldsymbol{\pi}_L \mathfrak{S}_L + \sum_{l>L} \pi_l \mathfrak{S}_{L,1-l}. \quad (4.97)$$

Beweis. Per Definition des Tensorproduktoperators sowie der Operatoren $\mathfrak{S}_{L,1}, \boldsymbol{\pi}_L$ und \mathfrak{S}_L , wegen $\mathcal{Z}_{L+1} = \nu_{L+1} + \sum_{l=1}^{\infty} \pi_l(\mathcal{Z}_{L+1-l})$ f.s. für alle L und den Überlegungen beim Beweis der Sätze 4.27 und 4.34 gilt, wie behauptet:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{L,1} &= \sum_{l=1}^L \pi_l \left(\mathbb{E}[\mathcal{Z}_L(L) \otimes \mathcal{Z}_{L+1-l}] \right) + \mathbb{E} \left[\sum_{l>L} \pi_l (\mathcal{Z}_L(L) \otimes \mathcal{Z}_{L+1-l}) \right] \\ &= \boldsymbol{\pi}_L \mathfrak{S}_L + \sum_{l>L} \pi_l \mathfrak{S}_{L,1-l}. \end{aligned}$$

Dabei wurde vom Satz von der majorisierten Konvergenz Gebrauch gemacht, dessen Voraussetzungen erfüllt sind, da per Definition von $\|\cdot\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^L}$ und $(\mathcal{Z}_k(L))_k$, wegen Stationarität von $(\mathcal{Z}_k)_k$, $\mathbb{E}\|\mathcal{Z}_0\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty$, $\sum_{l=1}^{\infty} \|\pi_l\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} < \infty$ nach Lemma 4.43 und der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung für alle L gilt:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \mathbb{E} \left\| \pi_l(\mathcal{Z}_L(L) \otimes \mathcal{Z}_{L+1-l}) \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}} \leq \sqrt{L} \mathbb{E}\|\mathcal{Z}_0\|_{\mathcal{H}}^2 \sum_{l=1}^{\infty} \|\pi_l\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} < \infty. \quad \square$$

Weil $\boldsymbol{\pi}_L := (\pi_1 \cdots \pi_L)$ eine Lösung von (4.97) für alle L ist und die Operatoren π_1, \dots, π_L nicht in $\sum_{l>L} \pi_l \mathfrak{S}_{L,1-l}$ enthalten sind, ist $\boldsymbol{\pi}_L$ nach Satz 4.22 und Korollar 4.41 die eindeutige Lösung von (4.97). Deshalb setzen wir wie im FARCH(\mathbf{p})-Modell mit $\mathbf{p} \in \mathbb{N}$

$$\hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K} := \hat{\mathfrak{S}}_{L,1} \hat{\mathfrak{S}}_L^{\dagger} \prod_{\hat{\mathfrak{c}}_{L,1}}^{\hat{\mathfrak{c}}_{L,K}} = \hat{\mathfrak{S}}_{L,1} \hat{\mathfrak{S}}_L (\hat{\mathfrak{S}}_L^2 + \vartheta_N \mathbb{I}_{\mathcal{H}^L})^{-1} \prod_{\hat{\mathfrak{c}}_{L,1}}^{\hat{\mathfrak{c}}_{L,K}} \quad (4.98)$$

als Schätzer für $\prod_{\mathcal{J}_{L,K}} \boldsymbol{\pi}_L$ mit $K, L, N \in \mathbb{N}$ an, wobei $(\vartheta_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \infty)$ eine Nullfolge sei.

Im Folgenden geben wir ein Konsistenzresultat für die Schätzfehler der Schätzer für die Operatoren π_i mittels der i -ten Komponenten der Schätzer $\hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}$ an, wobei Lemma 2.16 (c) sicherstellt, dass die Schätzer $\hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}$ operatorwertige Komponenten haben.

Lemma 4.46. *Es sei $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine \mathcal{H} -wertige FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihe für $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften auf S. 33 f., deren Parameter δ sowie $\alpha_1, \dots, \alpha_{\mathbf{p}}, \beta_1, \dots, \beta_{\mathbf{q}}$ die Annahme 4.8 und deren Zeitreihe $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ aus Innovationen (4.2) sowie die Annahme 4.9 erfülle. Ferner seien die Voraussetzungen von Lemma 4.43 erfüllt und die durch \mathcal{X} induzierte FARMA(\mathbf{r}, \mathbf{q})-Zeitreihe $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit $\mathbf{r} := \max(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ besitze die Darstellung (4.96), wobei die Folge der Operatoren $(\pi_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ in der invertierbaren Darstellung von \mathcal{Z} bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}$ absolutsummierbar sei. Ferner erfüllen die Kovarianzoperatoren $\mathfrak{S}_L = \mathcal{C}_{0; \mathcal{Z}(L)}$ von $\mathcal{Z}(\mathbf{r}) = (\mathcal{Z}_k(L))_{k \in \mathbb{Z}} = (\mathcal{Z}_k, \dots, \mathcal{Z}_{k-L+1})_{k \in \mathbb{Z}}$ die Annahme 4.18 für alle $L \in \mathbb{N}$, $(\Phi_{L,ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ seien die durch die Eigenfunktionenfolgen $(\mathfrak{c}_{L,j})_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}^L$ von \mathfrak{S}_L sowie $(\mathfrak{c}_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ von $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_{0; \mathcal{Z}}$ induzierten ONBs von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}$ für alle $L \in \mathbb{N}$ und $\hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K} = (\hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}^{(1)} \cdots \hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}^{(L)})$ seien die auf einer Stichprobe $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_N$ von \mathcal{X} mit $K, L, N \in \mathbb{N}$ basierenden Schätzer für $\boldsymbol{\pi}_L = (\pi_1 \cdots \pi_L)$ aus (4.98) mit einer*

Nullfolge $(\vartheta_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \infty)$.

- (a) Es sei $(L_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ eine Folge mit $L = L_N = \Xi(1, N^{1/4})$, es sei $K \in \mathbb{N}$, es gelte $\sum_{l>L} \|\pi_l\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}} = O(L^{-1/2})$, $\vartheta_N = O(\sqrt{L} \sum_{l>L} \|\pi_l\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}})$, $\vartheta_N = O(L^2 N^{-1/2})$ und $c_{L,K} = \Omega(1)$. Dann gilt für jedes $i \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \hat{\pi}_{L,K}^{(i)} - \left[\prod_{\mathcal{J}_{L,K}} \pi_L \right]^{(i)} \right\|_{\mathcal{S}\mathcal{H}}^2 = O_{\mathbb{P}}(L^4 N^{-1}) + O\left(L \left(\sum_{l>L} \|\pi_l\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}} \right)^2\right). \quad (4.99)$$

- (b) Nun sei $(L_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ eine Folge mit $L = L_N = \Xi(1, N)$, $(K_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ sei eine Folge mit $K = K_N = \Xi(1, \sqrt[3]{L^{-1}N})$, es gelte $c_{L,K} = \Omega(\sqrt{L^3 N^{-1}})$ sowie $\vartheta_N = O(c_{L,K}^{-2} K^{-\beta})$, die Tupel $(\pi_L, (\Phi_{L,ij})_{i,j})$ erfüllen die Annahme 4.24 für ein von L unabhängiges $\beta > 0$ für alle L und es gelte $c_{L,K}^{-1} \sqrt{KL^3 N^{-1}} = O(K^{-(2\beta+1)})$ im Fall $\sum_{l>L} \|\pi_l\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}} = O(c_{L,K}^{-1} \sqrt{KL^3 N^{-1}})$ bzw. $L^{-2} N (\sum_{l>L} \|\pi_l\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}})^4 = O(K^{1-2\beta})$ im Fall $c_{L,K}^{-1} \sqrt{KL^3 N^{-1}} = O(\sum_{l>L} \|\pi_l\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}})$. Dann gilt für alle $i \in \mathbb{N}$:

$$\|\hat{\pi}_{L,K}^{(i)} - \pi_i\|_{\mathcal{S}\mathcal{H}}^2 = O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta}). \quad (4.100)$$

Beweis. Die Methode bei der Schätzung der Operatoren in der invertierbaren Darstellung der Zeitreihe stimmt mit der Methode bei der Schätzung der Operatoren im FAR(**p**)-Modell in Satz 4.37 überein, wenn **p** durch eine geeignete Folge $(L_N)_N$ mit $L = L_N \rightarrow \infty$ ersetzt wird, wobei hier zusätzlich eingeht, dass der Operator \mathfrak{S}_L sowie seine Eigenwerte und Eigenfunktionen vom Stichprobenumfang N abhängen. Im Beweis beider Teile des Satzes werden wir

$$\hat{c}_{L,K}^{-1} = O_{\mathbb{P}}(c_{L,K}^{-1}) \quad (4.101)$$

nutzen, was wegen $c_{L,K} = O_{\mathbb{P}}(\hat{c}_{L,K})$ gemäß Korollar 4.42 aufgrund von $c_{L,K} = \Omega(\sqrt{L^3 N^{-1}})$ erfüllt ist (dies wurde in (b) vorausgesetzt und folgt für feste $K \in \mathbb{N}$ in (a) aus den Voraussetzungen $c_{L,K} = \Omega(1)$ sowie $L = o(N^{1/4})$). In Teil (a) werden wir außerdem

$$c_{L,K}^{-l} = O(1) \quad (4.102)$$

für feste $K, l \in \mathbb{N}$ verwenden, was wegen $c_{L,K} = \Omega(1)$ für jedes feste K erfüllt ist.

- (a) Aus (4.97) und den Umformungen im Beweis von Satz 4.37 folgt für alle K, L, N :

$$\begin{aligned} & \left\| \hat{\pi}_{L,K} - \prod_{\mathcal{J}_{L,K}} \pi_L \right\|_{\mathcal{S}\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}^2 \\ & \lesssim \|\hat{\mathfrak{S}}_{L,l} - \mathfrak{S}_{L,l}\|_{\mathcal{S}\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}^2 \left\| \hat{\mathfrak{S}}_L^{\dagger} \prod_{\hat{c}_{L,1}}^{\hat{c}_{L,K}} \right\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}^L}^2 + \|\mathfrak{S}_{L,1}\|_{\mathcal{S}\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}^2 \left\| \hat{\mathfrak{S}}_L^{\dagger} \prod_{\hat{c}_{L,1}}^{\hat{c}_{L,K}} - \mathfrak{S}_L^{\dagger} \prod_{c_{L,1}}^{c_{L,K}} \right\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}^L}^2 \\ & \quad + \left\| \mathfrak{S}_{L,1} \mathfrak{S}_L^{\dagger} \prod_{c_{L,1}}^{c_{L,K}} - \prod_{\mathcal{J}_{L,K}} \pi_L \right\|_{\mathcal{S}\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}^2 \\ & \lesssim O_{\mathbb{P}}(L^2 N^{-1}) \left\| \hat{\mathfrak{S}}_L^{\dagger} \prod_{\hat{c}_{L,1}}^{\hat{c}_{L,K}} \right\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}^L}^2 + L \cdot \left\| \hat{\mathfrak{S}}_L^{\dagger} \prod_{\hat{c}_{L,1}}^{\hat{c}_{L,K}} - \mathfrak{S}_L^{\dagger} \prod_{c_{L,1}}^{c_{L,K}} \right\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}^L}^2 + \left\| \left[\sum_{l>L} \pi_l \mathfrak{S}_{L,1-l} \right] \mathfrak{S}_L^{\dagger} \prod_{c_{L,1}}^{c_{L,K}} \right\|_{\mathcal{S}\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| \prod_{\mathcal{J}_{L,K}^c} \pi_L \mathfrak{S}_L^{\dagger} \prod_{\mathfrak{c}_{L,1}}^{\mathfrak{c}_{L,K}} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}}^2 + \left\| \prod_{\mathcal{J}_{L,K}} \pi_L \left[\mathfrak{S}_L^{\dagger} \prod_{\mathfrak{c}_{L,1}}^{\mathfrak{c}_{L,K}} - \mathbb{I}_{\mathcal{H}^L} \right] \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}}^2 \\
& =: O_{\mathbb{P}}(L^2 N^{-1}) \cdot T_1 + L \cdot T_2 + T_3 + T_4 + T_5.
\end{aligned} \tag{4.103}$$

Term T_1 : Wegen (4.101) und (4.102) gilt wie bei der Herleitung von T_1 in Satz 4.37:

$$\left\| \hat{\mathfrak{S}}_L^{\dagger} \prod_{\hat{\mathfrak{c}}_{L,1}}^{\hat{\mathfrak{c}}_{L,K}} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^L}}^2 = O_{\mathbb{P}}(c_{L,K}^{-2}) = O_{\mathbb{P}}(1). \tag{4.104}$$

Term T_2 : Aus (4.84) bis (4.88) und den Überlegungen bei der Herleitung der Rate des Terms T_2 in Satz 4.37, (4.101) und (4.102) resultiert für feste K mit $L = \Xi(1, N^{1/3})$:

$$\left\| \hat{\mathfrak{S}}_L^{\dagger} \prod_{\hat{\mathfrak{c}}_{L,1}}^{\hat{\mathfrak{c}}_{L,K}} - \mathfrak{S}_L^{\dagger} \prod_{\mathfrak{c}_{L,1}}^{\mathfrak{c}_{L,K}} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^L}}^2 = O_{\mathbb{P}}(c_{L,K}^{-4} L^3 N^{-1}) + O_{\mathbb{P}}(c_{L,K}^{-4} K L^3 N^{-1}) = O_{\mathbb{P}}(L^3 N^{-1}). \tag{4.105}$$

Term T_3 : Aus der operatorwertigen Hölder-Ungleichung in Satz 2.14, der Gestalt der Rate von T_1 , (4.83), (4.101) und (4.102) folgt

$$\left\| \left[\sum_{l>L} \pi_l \mathfrak{S}_{L,1-l} \right] \mathfrak{S}_L^{\dagger} \prod_{\mathfrak{c}_{L,1}}^{\mathfrak{c}_{L,K}} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}}^2 \leq c_{L,K}^{-2} \left\| \sum_{l>L} \pi_l \mathfrak{S}_{L,1-l} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}}^2 = O\left(L \left(\sum_{l>L} \|\pi_l\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} \right)^2\right). \tag{4.106}$$

Term T_4 : Da $(\mathfrak{c}_{L,k})_k$ eine ONB von \mathcal{H}^L , $(\mathfrak{c}_l)_l$ eine ONB von \mathcal{H} und $(\Phi_{L,ij})_{i,j}$ eine ONB von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}$ mit $\Phi_{L,ij}(\mathfrak{c}_{L,k}) = \delta_{jk} \mathfrak{c}_i$ für alle $i, j, k, L \in \mathbb{N}$ ist, gilt mit $\mathcal{J}_{L,K}^c := \{\Phi_{L,ij} | i, j > K\}$ für alle K, L wie bei der Herleitung der Rate von T_3 in Satz 4.37:

$$\left\| \prod_{\mathcal{J}_{L,K}^c} \pi_L \mathfrak{S}_L^{\dagger} \prod_{\mathfrak{c}_{L,1}}^{\mathfrak{c}_{L,K}} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}}^2 = \sum_{j=1}^K \mathbf{1}_{\mathbb{N}_{>K}}(j) \left[\frac{c_{L,j}^2}{c_{L,j}^2 + \vartheta_N} \right]^2 \left\| \sum_{i>K} \langle \pi_L(\mathfrak{c}_{L,j}), \mathfrak{c}_i \rangle_{\mathcal{H}} \mathfrak{c}_i \right\|_{\mathcal{H}}^2 = 0. \tag{4.107}$$

Term T_5 : Wegen $\|\pi_L\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}}^2 = \sum_{l=1}^L \|\pi_l\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2$ für alle L nach Lemma 2.16 und aufgrund von Quadratsummierbarkeit der Folge $(\|\pi_l\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}})_l$ gilt für jedes feste K (siehe Herleitung der Rate von T_4 in Satz 4.37):

$$\left\| \prod_{\mathcal{J}_{L,K}} \pi_L \left[\mathfrak{S}_L^{\dagger} \prod_{\mathfrak{c}_{L,1}}^{\mathfrak{c}_{L,K}} - \mathbb{I}_{\mathcal{H}^L} \right] \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}}^2 \lesssim \vartheta_N^2 c_{L,K}^{-4} \|\pi_L\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}}^2 = O(\vartheta_N^2). \tag{4.108}$$

Gelte $\vartheta_N = O(\sqrt{L} \sum_{l>L} \|\pi_l\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}})$ und $\vartheta_N = O(L^2 N^{-1/2})$, so führt das Einsetzen der Raten (4.104) bis (4.108) der Terme T_1 bis T_5 in (4.103) für feste $K \in \mathbb{N}$, wie behauptet, zu

$$\left\| \hat{\pi}_{L,K} - \prod_{\mathcal{J}_{L,K}} \pi_L \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(L^4 N^{-1}) + O\left(L \left(\sum_{l>L} \|\pi_l\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} \right)^2\right),$$

wobei diese Konvergenzrate nur sinnvoll ist, wenn, wie gefordert, sowohl $L = o(N^{1/4})$ als auch $\sum_{l>L} \|\pi_l\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} = O(L^{-1/2})$ gilt.

(b) Aus den in Teil (a) verwendeten Umformungen, wegen $L = \Xi(1, N)$, $K = \Xi(1, \sqrt[3]{L^{-1}N})$, $c_{L,K} = \Omega(\sqrt{L^3N^{-1}})$, (4.47), da $(\pi_L, (\Phi_{L,ij})_{i,j})$ die Annahme 4.24 für alle L für ein $\beta > 0$ erfüllt, und Korollar 4.39, (4.86), (4.88) sowie (4.101), folgt im Fall $\vartheta_N = O(c_{L,K}^{-2}K^{-\beta})$:

$$\begin{aligned} \|\hat{\pi}_{L,K} - \pi_L\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}}^2 &\lesssim \left\| \hat{\pi}_{L,K} - \prod_{\mathcal{J}_{L,K}} \pi_L \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}}^2 + \left\| \prod_{\mathcal{J}_{L,K}^c} \pi_L \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}}^2 \\ &= O_{\mathbb{P}}(c_{L,K}^{-4}KL^4N^{-1}) + O\left(L\left(c_{L,K}^{-1}\sum_{l>L}\|\pi_l\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}\right)^2\right) + O(K^{-2\beta}). \end{aligned}$$

Im Fall $\sum_{l>L}\|\pi_l\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} = O(c_{L,K}^{-1}\sqrt{KL^3N^{-1}})$ gilt folglich wegen $c_{L,K}^{-4}L^4N^{-1} = O(K^{-(2\beta+1)})$:

$$\|\hat{\pi}_{L,K} - \pi_L\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(c_{L,K}^{-4}KL^4N^{-1}) + O(K^{-2\beta}) = O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta}).$$

Im Fall $c_{L,K}^{-1}\sqrt{KL^3N^{-1}} = O(\sum_{l>L}\|\pi_l\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}})$ gilt mit $L^{-2}N(\sum_{l>L}\|\pi_l\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}})^4 = O(K^{1-2\beta})$:

$$\begin{aligned} \|\hat{\pi}_{L,K} - \pi_L\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}}^2 &= O_{\mathbb{P}}\left(L\left(c_{L,K}^{-1}\sum_{l>L}\|\pi_l\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}\right)^2\right) + O(K^{-2\beta}) \\ &= O_{\mathbb{P}}\left(K^{-1}L^{-2}N\left(\sum_{l>L}\|\pi_l\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}\right)^4\right) + O(K^{-2\beta}) \\ &= O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta}), \end{aligned}$$

wobei $c_{L,K}^{-1}\sqrt{KL^3N^{-1}} = O(\sum_{l>L}\|\pi_l\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}})$ wegen $c_{L,K}^{-1}\sqrt{KL^3N^{-1}} = \Omega(\sqrt{K^3LN^{-1}})$ aufgrund von $c_{L,K} = O(K^{-1}L)$ und da $(\sum_{l>L}\|\pi_l\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}})_N$ eine Nullfolge ist, nur möglich ist, wenn, wie gefordert, $K = o(\sqrt[3]{L^{-1}N})$ gilt. \square

Das folgende Beispiel verdeutlicht, dass für alle $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}$ Konstellationen von Operatoren im FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Modell vorliegen können, sodass die Folge $(\pi_i)_i$ aus Lemma 4.46 bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}$ absolutsummierbar ist und $(\pi_L, (\Phi_{L,ij})_{i,j})$ aus Teil (b) von Lemma 4.46 die Annahme 4.24 für alle L für ein $\beta > 0$ erfüllt.

Beispiel 4.47. Hier verwenden wir die Notationen aus Lemma 4.46. Für die Operatoren im FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Modell mit \mathbf{p}, \mathbf{q} gelte sowohl $\alpha_i = 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} = \beta_j$ für alle $i \neq \mathbf{p}, j \neq \mathbf{q}$ als auch $\alpha_{\mathbf{p}} = \beta_{\mathbf{q}} =: \gamma \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$, wobei $\gamma = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\gamma}_j(\mathbf{c}_j \otimes \mathbf{c}_j)$ ein selbstadjungierter Operator mit $\|\gamma\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}} < 1$ und $\tilde{\gamma}_j = O(j^{-a})$ für ein $a > \frac{1}{2}$ mit $j \rightarrow \infty$ sei. Ferner gelte für alle $L \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_{\leq L}$ und $j \in \mathbb{N}$: $\langle \mathbf{c}_{L,i}^{(m)}, \mathbf{c}_j \rangle_{\mathcal{H}} \asymp q_L^i$ für ein $q_L \in (0, 1)$ mit $i \rightarrow \infty$. Dann gilt wegen (4.136):

$$\pi_i = \begin{cases} 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}, & i < \mathbf{p} \\ \alpha_{\mathbf{p}}, & i = \mathbf{p} \\ 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}, & \mathbf{p} < i < \mathbf{p} + \mathbf{q} \\ \beta_{\mathbf{q}}\pi_{\mathbf{p}}, & i = \mathbf{p} + \mathbf{q} \\ 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}, & \mathbf{p} + \mathbf{q} < i < \mathbf{p} + 2\mathbf{q} \\ \beta_{\mathbf{q}}\pi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}, & i = \mathbf{p} + 2\mathbf{q} \\ \vdots & \vdots \end{cases} = \begin{cases} \gamma^k, & i = \mathbf{p} + (k-1)\mathbf{q} \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (4.109)$$

und folglich gilt wegen $\|\gamma\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}} < 1$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\pi_i\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|\gamma\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^k < \infty.$$

Für $L \in \mathbb{N}_{<\mathbf{p}}$ erfüllt $(\pi_L, (\Phi_{L,ij})_{i,j})$ die Annahme 4.24 für alle $\beta > 0$. Nun sei $L \in \mathbb{N}_{\geq \mathbf{p}}$, und $k \in \mathbb{N}$ sei so gewählt, dass $L \in [\mathbf{p} + (k-1)\mathbf{q}, \mathbf{p} + k\mathbf{q}]$ gelte. Dann gilt wegen (4.109) und $\Phi_{L,ij} = \mathbf{c}_{L,i} \otimes \mathbf{c}_j$ für alle i, j zunächst

$$\langle \pi_L, \Phi_{L,ij} \rangle_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}} = \left\langle \sum_{n=1}^L \pi_n(\mathbf{c}_{L,i}^{(n)}), \mathbf{c}_j \right\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^k \tilde{\gamma}_j^n \langle \mathbf{c}_{L,i}^{(\mathbf{p}+(n-1)\mathbf{q})}, \mathbf{c}_j \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Aus $\sum_{i=1}^{\infty} \langle \mathbf{c}_{L,i}^{(\mathbf{p}+(n-1)\mathbf{q})}, \mathbf{c}_j \rangle_{\mathcal{H}}^2 =: d < \infty$ für alle j und L , $\sum_{i=1}^{\infty} i^{2\beta} \langle \mathbf{c}_{L,i}^{(\mathbf{p}+(n-1)\mathbf{q})}, \mathbf{c}_j \rangle_{\mathcal{H}}^2 =: d_\beta < \infty$ für alle j, L sowie $\beta > 0$ und $\tilde{\gamma}_j^{2n} = O(j^{-a})$ für $j \rightarrow \infty$ für alle $n = 1, \dots, k$ für ein $a > \frac{1}{2}$ folgt für alle $\beta \in (0, 2a - 1)$ und $L \in \mathbb{N}_{\geq \mathbf{p}}$ mit $L \in [\mathbf{p} + (k-1)\mathbf{q}, \mathbf{p} + k\mathbf{q}]$:

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \langle \pi_L, \Phi_{L,ij} \rangle_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^L, \mathcal{H}}}^2 (1 + i^{2\beta} + j^{2\beta}) \leq k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\gamma}_j^{2n} (d + d_\beta) + j^{2\beta} \tilde{\gamma}_j^{2n} d < \infty,$$

womit $(\pi_L, (\Phi_{L,ij})_{i,j})$ für $L \in \mathbb{N}_{\geq \mathbf{p}}$ die Annahme 4.24 für gewisse $\beta > 0$ erfüllt. \blacklozenge

4.4.1.3 Operatorschätzung im linearen Prozess

Hier widmen wir uns der Schätzung des Operators ψ_i für alle $i \in \mathbb{N}$ in der Darstellung

$$\mathcal{Z}_k = \nu_k + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(\nu_{k-i}) \quad (4.110)$$

f.s. für alle k , wobei $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ die durch die FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihe $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ induzierte FARMA(\mathbf{r}, \mathbf{q})-Zeitreihe sei. Dabei gehen wir davon aus, dass die Voraussetzungen von Lemma 4.43 erfüllt sind, wonach \mathcal{Z} die Darstellung (4.110) als linearen Prozess mit $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \|\psi_i\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} < \infty$ besitzt. Die Schätzer, die wir für die Operatoren in (4.110) herleiten werden, basieren auf den Schätzern in der Darstellung der Operatoren in der invertierbaren Darstellung, wobei für die quadratischen Schätzfehler dieser Schätzer für die zu schätzenden Größen bereits ein Konsistenzresultat vorliegt. Wir werden jedoch sehen, dass das Resultat für die Schätzung der Operatoren in (4.110) nicht für die Schätzung der Operatoren im FGARCH-Modell gebraucht wird.

Wegen $\mathcal{Z}_k = \nu_k + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(\nu_{k-i})$ f.s. und $\mathcal{Z}_k = \nu_k + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j(\mathcal{Z}_{k-j})$ f.s. für alle k gilt

$$\mathcal{Z}_k = \nu_k + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \left(\nu_{k-i} + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(\nu_{k-i-j}) \right) = \nu_k + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^i \pi_j \psi_{i-j} \right] (\nu_{k-i}) \quad (4.111)$$

f.s. für alle k mit $\psi_0 := \mathbb{I}_{\mathcal{H}}$, womit

$$\psi_i = \sum_{j=1}^i \pi_j \psi_{i-j} \quad (4.112)$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ eine hinreichende Bedingung von (4.111) ist. Gemäß des folgenden Lemmas ist diese Bedingung jedoch nicht notwendig.

Lemma 4.48. *Es sei $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ ein separabler Banach-Raum, es sei $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von \mathcal{B} -wertigen Zufallsvariablen und es sei $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ eine Folge von Operatoren. Dann gilt $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(X_k) = 0_{\mathcal{B}'}$ f.s., falls $X_k \in \text{Kern}(A_k)$ f.s. für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.*

Beweis. $\mathbb{P}(\sum_{k=1}^{\infty} A_k(X_k) = 0_{\mathcal{B}'}) < 1$ impliziert $\mathbb{P}(A_k(X_k) = 0_{\mathcal{B}'}) < 1$, bzw. äquivalent dazu, $\mathbb{P}(X_k \in \text{Kern}(A_k)) < 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$. \square

Bemerkung 4.49. Falls die Parameter der \mathcal{H} -wertigen FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihe \mathcal{X} mit den Eigenschaften auf S.33 f. die Annahme 4.8 erfüllen und die \mathcal{H} -wertige Zeitreihe $(\varepsilon_k)_k$ aus Innovationen von \mathcal{X} sowohl (4.2) als auch die Annahme 4.9 erfülle, so gilt $\nu_0 \in U$ f.s. für keinen abgeschlossenen Unterraum $U \subsetneq \mathcal{H}$ nach Lemma 4.11. Demzufolge gilt $\text{Kern}(\psi_i - \sum_{j=1}^i \pi_j \psi_{i-j}) = \mathcal{H}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, womit (4.112) nach Lemma 4.48 auch eine notwendige Bedingung von (4.111) ist. \blacklozenge

Nun leiten wir die Schätzer für die Operatoren in (4.112) her. Da die Operatoren ψ_i für alle $i \in \mathbb{N}$ wegen (4.112) ausschließlich von den Operatoren π_1, \dots, π_i abhängen, die sich nach Lemma 4.46 konsistent schätzen lassen, ergibt sich das nachfolgende Konsistenzresultat für die Operatoren in (4.112), wobei aus beweistechnischen Gründen auf eine Angabe eines Resultats wie in Lemma 4.46 (a) verzichtet werden muss.

Korollar 4.50. Für $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine \mathcal{H} -wertige FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihe mit den Eigenschaften auf S.33 f. und es gelten die Voraussetzungen von Lemma 4.43 und Lemma 4.46 (b). Dann sind

$$\hat{\psi}_{L,K}^{(i)} := \sum_{j=1}^i \hat{\pi}_{L,K}^{(j)} \hat{\psi}_{L,K}^{(i-j)} \quad (4.113)$$

mit $K, L \in \mathbb{N}$ und $\hat{\psi}_{L,K}^{(0)} := \mathbb{I}_{\mathcal{H}}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ konsistente Schätzer für ψ_i mit

$$\|\hat{\psi}_{L,K}^{(i)} - \psi_i\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta}). \quad (4.114)$$

Beweis.

Induktionsanfang: Für $i = 1$ gilt wegen $\psi_0 = \mathbb{I}_{\mathcal{H}} = \hat{\psi}_{L,K}^{(0)}$ für alle $K, L \in \mathbb{N}$, den Identitäten (4.112) sowie (4.113) und Lemma 4.46 (b), wie behauptet:

$$\|\hat{\psi}_{L,K}^{(1)} - \psi_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = \|\hat{\pi}_{L,K}^{(1)} - \pi_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta_0}).$$

Induktionsvoraussetzung: (4.114) gelte für $l = 1, \dots, i$ für ein beliebiges, aber festes $i \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss ($i \rightarrow i+1$): Aus elementaren Umformungen, Lemma 4.1, Teil (b) von Lemma 4.46 und der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\begin{aligned} \|\hat{\psi}_{L,K}^{(i+1)} - \psi_{i+1}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 &\lesssim \sum_{j=1}^{i+1} \|\hat{\pi}_{L,K}^{(j)}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \|\hat{\psi}_{L,K}^{(i+1-j)} - \psi_{i+1-j}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 + \|\hat{\pi}_{L,K}^{(j)} - \pi_j\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \|\psi_{i+1-j}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \\ &= \sum_{j=1}^{i+1} O_{\mathbb{P}}(1) O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta_0}) + O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta_0}) = O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta_0}). \end{aligned} \quad \square$$

4.4.2 Operatorschätzung im FGARCH(1, 1)-Modell

Der Einfachheit halber leiten wir zunächst die Schätzer für die Operatoren im FGARCH(1, 1)-Modell her. Dabei gilt wegen $\mathcal{Z}_{k-1} = \nu_{k-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(\nu_{k-1-i})$

$$\mathcal{Z}_k = \nu_k + (\alpha_1 + \beta_1)(\mathcal{Z}_{k-1}) - \beta_1(\nu_{k-1}) = \nu_k + \alpha_1(\nu_{k-1}) + \sum_{i=2}^{\infty} (\alpha_1 + \beta_1)\psi_{i-1}(\nu_{k-i})$$

f.s. für alle k , und wegen $\nu_{k-1} = \mathcal{Z}_{k-1} - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i(\mathcal{Z}_{k-1-i})$ gilt

$$\mathcal{Z}_k = \nu_k + (\alpha_1 + \beta_1)(\mathcal{Z}_{k-1}) - \beta_1(\nu_{k-1}) = \nu_k + \alpha_1(\mathcal{Z}_{k-1}) + \sum_{i=2}^{\infty} \beta_1 \pi_{i-1}(\mathcal{Z}_{k-i})$$

f.s. für alle k . Unter der Annahme, dass die Parameter δ sowie α_1, β_1 der FGARCH(1, 1)-Zeitreihe \mathcal{X} die Annahme 4.8 erfüllen und die Zeitreihe $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{H}$ aus Innovationen von \mathcal{X} (4.2) sowie die Annahme 4.9 erfüllt, gilt nach der Bemerkung 4.49 sowohl

$$\psi_i = \begin{cases} \alpha_1, & i = 1, \\ (\alpha_1 + \beta_1)\psi_{i-1}, & i > 1, \end{cases} \quad (4.115)$$

als auch

$$\pi_i = \begin{cases} \alpha_1, & i = 1, \\ \beta_1 \pi_{i-1}, & i > 1. \end{cases} \quad (4.116)$$

Da die Operatoren π_i für alle $i \in \mathbb{N}$ nach Lemma 4.46 konsistent geschätzt werden können, lassen sich aus (4.116) nun Schätzer für α_1 und β_1 herleiten. Wie bereits bei der Operatorschätzung im linearen Prozess angedeutet, ist es nicht sinnvoll, Schätzer für α_1 und β_1 , ausgehend von der Darstellung (4.115), zu konstruieren, da ψ_i für $i > 1$ im Gegensatz zu π_i noch den zusätzlich zu schätzenden Operator α_1 beinhaltet.

Der Operator α_1 lässt sich mit geeigneter Wahl der Folgen $K = K_N, L = L_N \rightarrow \infty$ und $(\vartheta_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \infty)$ nach (4.116) sowie Lemma 4.46 konsistent schätzen mit

$$\hat{\alpha}_{1;L,K} := \hat{\pi}_{L,K}^{(1)}. \quad (4.117)$$

Zur Schätzung von β_1 ziehen wir die Gleichung $\pi_2 = \beta_1 \pi_1$ heran, wobei β_1 wie bei der Schätzung von α_1 im FARCH(1)-Modell nicht notwendigerweise die eindeutige Lösung von $\pi_2 = \beta_1 \pi_1$ und $\pi_1 = \alpha_1$ als kompakter Operator nicht invertierbar ist. Allerdings lassen sich die beiden Probleme beheben, indem wir dichtes Bild von $\pi_1 = \alpha_1$ fordern (siehe Satz 4.22) und die Tichonow-Regularisierte der Schätzer für π_1 verwenden, die auf einen geeigneten Unterraum zu projizieren ist. Als Schätzer für β_1 setzen wir demzufolge

$$\hat{\beta}_{1;L,K,M} := \hat{\pi}_{L,K}^{(2)}(\hat{\pi}_{L,K}^{(1)})^\dagger \prod_{\hat{\mathfrak{g}}_{1;L,K}^{(1)}}^{\hat{\mathfrak{g}}_{M;L,K}^{(1)}} = \hat{\pi}_{L,K}^{(2)}(\hat{\pi}_{L,K}^{(1)})^* \left(\hat{\pi}_{L,K}^{(1)}(\hat{\pi}_{L,K}^{(1)})^* + \theta_N \mathbb{I}_{\mathcal{H}} \right)^{-1} \prod_{\hat{\mathfrak{g}}_{1;L,K}^{(1)}}^{\hat{\mathfrak{g}}_{M;L,K}^{(1)}} \quad (4.118)$$

mit geeigneten Folgen $(\theta_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \infty)$ sowie $(K_N)_{N \in \mathbb{N}}, (L_N)_{N \in \mathbb{N}}, (M_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ an, welche zumindest $\theta_N \rightarrow 0, K = K_N \rightarrow \infty, L = L_N \rightarrow \infty, M = M_N \rightarrow \infty$ erfüllen. Dabei stehen $\hat{\pi}_{L,K}^{(1)}$ und $\hat{\pi}_{L,K}^{(2)}$ mit einer geeigneten Folge $(\vartheta_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \infty)$ für die Schätzer aus (4.98),

und $(\hat{\mathbf{g}}_{j;L,K}^{(1)})_j$ steht für die Eigenfunktionenfolge mit der zugehörigen o.B.d.A. monoton fallenden Eigenwertfolge $(\hat{g}_{j;L,K}^{(1)})_j$ von $\hat{\pi}_{L,K}^{(1)}(\hat{\pi}_{L,K}^{(1)})^*$.

Bevor wir das Resultat für die Schätzung der beiden Operatoren im FGARCH(1,1)-Modell angeben, zeigen wir, wie die Eigenwerte bzw. die Eigenfunktionen von π_1 geschätzt werden können und wie sich die Folge geschätzter Eigenwerte unter bestimmten Voraussetzungen asymptotisch verhält. Für die Eigenfunktionenfolge des selbstadjungierten, positiv semi-definiten Operators $\pi_1\pi_1^*$ schreiben wir $(\mathbf{g}_{j;1})_{j \in \mathbb{N}}$ und für die zugehörige o.B.d.A. monoton fallende Eigenwertfolge $(g_{j;1})_{j \in \mathbb{N}}$.

Für die Eigenwerte folgt aus (4.18), Lemma 4.1 und Lemma 4.46 für alle $K, L \in \mathbb{N}$

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} (\hat{g}_{j;L,K}^{(1)} - g_{j;1})^2 \leq \left\| \hat{\pi}_{L,K}^{(1)}(\hat{\pi}_{L,K}^{(1)})^* - \pi_1\pi_1^* \right\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}}^2 = O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta}) \quad (4.119)$$

und nach (4.21) gilt wegen $g_{M;1} = \Xi[K^{-\beta/2}, 1)$ für $M = M_N \rightarrow \infty$

$$\hat{g}_{M;L,K}^{(1)} = O_{\mathbb{P}}(g_{M;1}) \quad \text{und} \quad g_{M;1} = O_{\mathbb{P}}(\hat{g}_{M;L,K}^{(1)}). \quad (4.120)$$

Nun kommen wir zur Schätzung der Eigenfunktionen von $\pi_1\pi_1^*$. Hierzu fordern wir, dass $\pi_1\pi_1^*$ die Annahme 4.18 erfüllt. Dabei ist anzumerken, dass $\pi_1\pi_1^*$ aufgrund der Voraussetzung, dass π_1 dichtes Bild besitzt, gemäß Definition und Eigenschaften 2.8 (f) bereits Teil (a) der Annahme 4.18 erfüllt. Dann gilt nach Lemma 4.16

$$\left\| (\hat{\mathbf{g}}_{j;L,K}^{(1)})' - \mathbf{g}_{j;1} \right\|_{\mathcal{H}} \leq \tilde{\gamma}_j \left\| \hat{\pi}_{L,K}^{(1)}(\hat{\pi}_{L,K}^{(1)})^* - \pi_1\pi_1^* \right\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}} \quad (4.121)$$

für alle j , wobei $\tilde{\gamma}_1 := 2\sqrt{2}\gamma_1$ und $\tilde{\gamma}_j := 2\sqrt{2} \max(\gamma_j, \gamma_{j-1})$ für $j > 1$ wie in (4.29) mit $\gamma_j = \gamma(g_{j;1}) := (g_{j;1} - g_{j+1;1})^{-1}$ für alle j gelte und wegen $\sup_{j \leq M} \tilde{\gamma}_j = \sup_{j \leq M} \gamma_j \asymp g_{M;1}^{-1}$ gilt für jede Folge $(M_N)_N \subseteq \mathbb{N}$ mit $M = M_N \rightarrow \infty$, (4.120) sowie (4.121) mit $(\hat{\mathbf{g}}_{j;L,K}^{(1)})' := \text{sgn}(\langle \hat{\mathbf{g}}_{j;L,K}^{(1)}, \mathbf{g}_{j;1} \rangle_{\mathcal{H}}) \hat{\mathbf{g}}_{j;L,K}^{(1)}$ für alle j, K, L :

$$\sup_{j \leq M} \left\| (\hat{\mathbf{g}}_{j;L,K}^{(1)})' - \mathbf{g}_{j;1} \right\|_{\mathcal{H}}^2 = O_{\mathbb{P}}(g_{M;1}^{-2} K^{-2\beta}). \quad (4.122)$$

Des Weiteren benötigen wir für diverse Umformungen wie bei der Herleitung der Konvergenzraten der Schätzfehler der Schätzer für die Operatoren im FARCH(p)-Modell:

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{g}}_{j;L,K}^{(1)})''' &:= \left[\mathbf{1}_{\mathbb{R} \neq 0} \left(\text{sgn}(\langle (\hat{\mathbf{g}}_{j;L,K}^{(1)})'', \mathbf{g}_{j;1} \rangle_{\mathcal{H}}) \right) \text{sgn}(\langle (\hat{\mathbf{g}}_{j;L,K}^{(1)})'', \mathbf{g}_{j;1} \rangle_{\mathcal{H}}) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{1}_{\{0\}} \left(\text{sgn}(\langle (\hat{\mathbf{g}}_{j;L,K}^{(1)})'', \mathbf{g}_{j;1} \rangle_{\mathcal{H}}) \right) \right] \hat{\mathbf{g}}_{j;L,K}^{(1)}, \end{aligned} \quad (4.123)$$

wobei die Schätzer $(\hat{\mathbf{g}}_{j;L,K}^{(1)})''$ für alle $j, K, L, N \in \mathbb{N}$ durch

$$(\hat{\mathbf{g}}_{j;L,K}^{(1)})'' := \hat{\mathbf{g}}_{j;L,K}^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_k h_k}{k^2 N} \quad (4.124)$$

definiert seien. Dabei steht $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ für eine ONB von \mathcal{H} , und $(\zeta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ steht für eine Folge von u.i.v. Zufallsvariablen mit $\zeta_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$, die stochastisch unabhängig von den Zufallsvariablen ist, auf denen die Schätzer $\hat{\mathbf{g}}_{j;L,K}^{(1)}$ basieren. Außerdem, falls $\pi_1\pi_1^*$ die Annahme

4.18 erfüllt und $(M_N)_N$ mit $M = M_N = \Xi[1, N)$ so gewählt ist, dass für die Eigenwertfolge $(g_{j;1})_j$ von $\pi_1 \pi_1^*$ zumindest $g_{M;1} = \omega(K^{-\beta})$ für $M \rightarrow \infty$ gelte, gilt nach Korollar 4.20:

$$\sup_{j \leq M} \|(\hat{\mathbf{g}}_{j;L,K}^{(1)})''' - \mathbf{g}_{j;1}\|_{\mathcal{H}}^2 = O_{\mathbb{P}}(g_{M;1}^{-2} K^{-2\beta}). \quad (4.125)$$

Wir geben nun ein Konsistenzresultats für die Schätzung der beiden Operatoren im FGARCH(1,1)-Modell getroffen und im Anschluss ein Beispiel für konkrete Raten an.

Satz 4.51. *Es sei $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine \mathcal{H} -wertige FGARCH(1,1)-Zeitreihe mit den Eigenschaften auf S. 33 f. und es gelten sowohl die eingangs von Lemma 4.46 als auch die in Lemma 4.46 (b) erwähnten Notationen und Voraussetzungen für $\mathbf{p} = 1 = \mathbf{q}$. Dann gilt für die Schätzer $\hat{\alpha}_{1;L,K}$ aus (4.117) für α_1 mit $\beta > 0$ aus Lemma 4.46*

$$\|\hat{\alpha}_{1;L,K} - \alpha_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta}). \quad (4.126)$$

Ferner habe $\pi_1 = \alpha_1$ dichtes Bild, $\pi_1 \pi_1^*$ erfülle die Annahme 4.18, $(\theta_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \infty)$ sei eine Folge mit $\theta_N = O(K^{-\beta/2})$, $(M_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ sei eine Folge mit $g_{M;1}^{-1} M^\beta = O(K^\beta)$, wobei $(g_{j;1})_{j \in \mathbb{N}}$ die zur Eigenfunktionenfolge $(\mathbf{g}_{j;1})_{j \in \mathbb{N}}$ gehörende o. B. d. A. monoton fallende Eigenwertfolge von $\pi_1 \pi_1^*$ sei und das Tupel $(\beta_1, (\phi_{ij;1})_{i,j \in \mathbb{N}})$ erfülle die Annahme 4.24 für $\beta > 0$, wobei $(\phi_{ij;1})_{i,j}$ die durch $(\mathbf{g}_{j;1})_j$ induzierte ONB von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ sei. Dann gilt für die Schätzer $\hat{\beta}_{1;L,K,M}$ aus (4.118) für β_1 :

$$\|\hat{\beta}_{1;L,K,M} - \beta_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(M^{-2\beta}). \quad (4.127)$$

Beweis. Unter den Voraussetzungen von Lemma 4.46 (b) gilt für die Schätzer $\hat{\alpha}_{1;L,K}$ aus (4.117) für $\alpha_1 = \pi_1$ nach (4.116) mit $N \rightarrow \infty$ wie behauptet (4.126). Ferner gilt wie im Beweis von Satz 4.28 für alle $K = K_N, L = L_N, M = M_N \in \mathbb{N}$ mit $N \in \mathbb{N}$ wegen (4.47) mit $\mathcal{J}_{M;1} := \{\phi_{ij;1} \mid 1 \leq i, j \leq M\}$, Lemma 4.46 (b) und $\pi_2 = \beta_1 \pi_1$:

$$\begin{aligned} & \|\hat{\beta}_{1;L,K,M} - \beta_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \\ & \lesssim \left\| \hat{\beta}_{1;L,K,M} - \prod_{\mathcal{J}_{M;1}} \beta_1 \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 + \left\| \prod_{\mathcal{J}_{M;1}} \beta_1 \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \\ & \lesssim \|\hat{\pi}_{L,K}^{(2)} - \pi_2\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \left\| \left(\hat{\pi}_{L,K}^{(1)} \right)^\dagger \prod_{\hat{\mathbf{g}}_{1;L,K}^{(1)}}^{\hat{\mathbf{g}}_{M;L,K}^{(1)}} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^2 + \|\pi_2\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \left\| \left(\hat{\pi}_{L,K}^{(1)} \right)^\dagger \prod_{\hat{\mathbf{g}}_{1;L,K}^{(1)}}^{\hat{\mathbf{g}}_{M;L,K}^{(1)}} - \pi_1^\dagger \prod_{\mathbf{g}_{1;1}}^{\mathbf{g}_{M;1}} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^2 \\ & \quad + \left\| \pi_2 \pi_1^\dagger \prod_{\mathbf{g}_{1;1}}^{\mathbf{g}_{M;1}} - \prod_{\mathcal{J}_{M;1}} \beta_1 \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 + O(M^{-2\beta}) \\ & \lesssim O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta}) \left\| \left(\hat{\pi}_{L,K}^{(1)} \right)^\dagger \prod_{\hat{\mathbf{g}}_{1;L,K}^{(1)}}^{\hat{\mathbf{g}}_{M;L,K}^{(1)}} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^2 + \left\| \left(\hat{\pi}_{L,K}^{(1)} \right)^\dagger \prod_{\hat{\mathbf{g}}_{1;L,K}^{(1)}}^{\hat{\mathbf{g}}_{M;L,K}^{(1)}} - \pi_1^\dagger \prod_{\mathbf{g}_{1;1}}^{\mathbf{g}_{M;1}} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}^2 \\ & \quad + \left\| \prod_{\mathcal{J}_{M;1}} \beta_1 \pi_1^\dagger \prod_{\mathbf{g}_{1;1}}^{\mathbf{g}_{M;1}} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 + \left\| \prod_{\mathcal{J}_{M;1}} \beta_1 \left[\pi_1^\dagger \prod_{\mathbf{g}_{1;1}}^{\mathbf{g}_{M;1}} - \mathbb{I}_{\mathcal{H}} \right] \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 + O(M^{-2\beta}) \end{aligned}$$

$$=: \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta}) \cdot T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \mathcal{O}(M^{-2\beta}). \quad (4.128)$$

Term T_1 : Per Definition von $(\hat{\pi}_{L,K}^{(1)})^\dagger$, da Operatoren mit gleichen Eigenfunktionenfolgen kommutieren und wegen (4.120), gilt (siehe Umformungen bei Term T_2 in Satz 4.55):

$$\begin{aligned} \left\| (\hat{\pi}_{L,K}^{(1)})^\dagger \prod_{\hat{\mathfrak{g}}_{1;L,K}^{(1)}}^{\hat{\mathfrak{g}}_{M;L,K}^{(1)}} \right\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}}^2 &= \left\| \left(\hat{\pi}_{L,K}^{(1)} (\hat{\pi}_{L,K}^{(1)})^* + \theta_N \mathbb{I}_{\mathcal{H}} \right)^{-2} \hat{\pi}_{L,K}^{(1)} (\hat{\pi}_{L,K}^{(1)})^* \prod_{\hat{\mathfrak{g}}_{1;L,K}^{(1)}}^{\hat{\mathfrak{g}}_{M;L,K}^{(1)}} \right\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}} \\ &= \sup_{j \leq M} \frac{\hat{g}_{j;L,K}^{(1)}}{(\hat{g}_{j;L,K}^{(1)} + \theta_N)^2} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(g_{M;1}^{-1}). \end{aligned} \quad (4.129)$$

Term T_2 : Aus den Überlegungen bei der Herleitung der Rate von T_2 in Satz 4.28, aus $\pi_1^\dagger = \pi_1^* (\pi_1 \pi_1^* + \theta_N \mathbb{I}_{\mathcal{H}})^{-1}$, $(\hat{\pi}_{L,K}^{(1)})^\dagger = (\hat{\pi}_{L,K}^{(1)})^* (\hat{\pi}_{L,K}^{(1)} (\hat{\pi}_{L,K}^{(1)})^* + \theta_N \mathbb{I}_{\mathcal{H}})^{-1}$, $\|(\hat{\pi}_{L,K}^{(1)})^* ((\hat{\mathfrak{g}}_{j;L,K}^{(1)})''')\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle \hat{\pi}_{L,K}^{(1)} (\hat{\pi}_{L,K}^{(1)})^* ((\hat{\mathfrak{g}}_{j;L,K}^{(1)})'''), (\hat{\mathfrak{g}}_{j;L,K}^{(1)})''' \rangle_{\mathcal{H}} = \hat{g}_{j;L,K}^{(1)}$ für alle j, K, L sowie aus (4.100), (4.119), (4.120) und (4.125) folgt für alle K, L, M :

$$\begin{aligned} &\left\| (\hat{\pi}_{L,K}^{(1)})^\dagger \prod_{\hat{\mathfrak{g}}_{1;L,K}^{(1)}}^{\hat{\mathfrak{g}}_{M;L,K}^{(1)}} - \pi_1^\dagger \prod_{\mathfrak{g}_{1;1}}^{\mathfrak{g}_{M;1}} \right\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}}^2 \\ &= \sup_{\|h\|_{\mathcal{H}} \leq 1} \left\| \sum_{j=1}^M \frac{\langle h, (\hat{\mathfrak{g}}_{j;L,K}^{(1)})''' \rangle_{\mathcal{H}}}{\hat{g}_{j;L,K}^{(1)} + \theta_N} (\hat{\pi}_{L,K}^{(1)})^* ((\hat{\mathfrak{g}}_{j;L,K}^{(1)})''') - \frac{\langle h, \mathfrak{g}_{j;1} \rangle_{\mathcal{H}}}{g_{j;1} + \theta_N} \pi_1^* (\mathfrak{g}_{j;1}) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\lesssim \sup_{\|h\|_{\mathcal{H}} \leq 1} \sum_{j=1}^M \left| \frac{\langle h, (\hat{\mathfrak{g}}_{j;L,K}^{(1)})''' \rangle_{\mathcal{H}} \sqrt{\hat{g}_{j;L,K}^{(1)}}}{\hat{g}_{j;L,K}^{(1)} + \theta_N} - \frac{\langle h, \mathfrak{g}_{j;1} \rangle_{\mathcal{H}} \sqrt{g_{j;1}}}{g_{j;1} + \theta_N} \right|^2 \\ &\quad + \sup_{\|h\|_{\mathcal{H}} \leq 1} \left| \frac{\langle h, \mathfrak{g}_{j;1} \rangle_{\mathcal{H}}}{g_{j;1} + \theta_N} \right|^2 \left(\sqrt{g_{j;1}} - \sqrt{\hat{g}_{j;L,K}^{(1)}} \right)^2 \\ &\quad + \sup_{j \leq M} \left| \frac{1}{g_{j;1} + \theta_N} \right|^2 \left(\left\| (\hat{\pi}_{L,K}^{(1)})^* \right\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}}^2 \left\| (\hat{\mathfrak{g}}_{j;L,K}^{(1)})''' - \mathfrak{g}_{j;1} \right\|_{\mathcal{H}}^2 + \left\| (\hat{\pi}_{L,K}^{(1)})^* - \pi_1^* \right\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}}^2 \right) \\ &\lesssim \sup_{j \leq M} \left| \frac{\sqrt{\hat{g}_{j;L,K}^{(1)}}}{\hat{g}_{j;L,K}^{(1)} + \theta_N} - \frac{\sqrt{g_{j;1}}}{g_{j;1} + \theta_N} \right|^2 + M g_{M;1}^{-1} \sup_{j \leq M} \left\| (\hat{\mathfrak{g}}_{j;L,K}^{(1)})''' - \mathfrak{g}_{j;1} \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\quad + \sup_{j \leq M} \left| \frac{1}{g_{j;1} + \theta_N} \right|^2 |g_{j;1} - \hat{g}_{j;L,K}^{(1)}| + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(g_{M;1}^{-4} K^{-2\beta}) + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(g_{M;1}^{-2} K^{-2\beta}) \\ &\leq \sup_{j \leq M} \left(\sqrt{\hat{g}_{j;L,K}^{(1)}} - \sqrt{g_{j;1}} \right)^2 \left(g_{j;1}^{-2} + (\hat{g}_{j;L,K}^{(1)})^{-2} \right) + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(g_{M;1}^{-3} M K^{-2\beta}) + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(g_{M;1}^{-2} K^{-\beta}) \\ &\quad + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(g_{M;1}^{-4} K^{-2\beta}) + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(g_{M;1}^{-2} K^{-2\beta}) \\ &= \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(g_{M;1}^{-2} K^{-\beta}) + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(g_{M;1}^{-3} M K^{-2\beta}) + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(g_{M;1}^{-2} K^{-\beta}) + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(g_{M;1}^{-4} K^{-2\beta}) \\ &= \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(g_{M;1}^{-2} K^{-\beta}). \end{aligned} \quad (4.130)$$

In die letzten beiden Schritte ist sowohl $M = \mathcal{O}(g_{M;1}^{-1})$ eingegangen, was daraus folgt, dass die Eigenwertfolge $(g_{j;1})_j$ des nach Satz 2.21 nuklearen Operators $\pi_1 \pi_1^*$ absolutsummierbar ist, als auch $g_{M;1}^{-4} K^{-2\beta} = \mathcal{O}(g_{M;1}^{-2} K^{-\beta})$, was wegen $g_{M;1}^{-2} K^{-\beta} = o(1)$ gilt.

Term T_3 : Wie bei der Herleitung der Rate von Term T_3 in Satz 4.28 gilt für jedes $M \in \mathbb{N}$ per Definition der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{S}\mathcal{H}}$, wegen $\pi_1^\dagger \prod_{\mathfrak{g}_{1;1}}^{\mathfrak{g}_{M;1}} (\mathfrak{g}_{j;1}) = \mathbf{1}_{\mathbb{N}_{\leq M}}(j) \frac{g_{j;1}}{g_{j;1} + \theta_N} \mathfrak{g}_{j;1}$ und wegen

$\prod_{\mathcal{J}_{M;1}^c} \beta_1(\mathbf{g}_{j;1}) = \mathbf{1}_{\mathbb{N}_{>M}}(j) \sum_{i>M} \langle \beta_1(\mathbf{g}_{j;1}), \mathbf{g}_{i;1} \rangle_{\mathcal{H}} \mathbf{g}_{i;1}$ für alle j :

$$\left\| \prod_{\mathcal{J}_{M;1}^c} \beta_1 \pi_1^\dagger \prod_{\mathbf{g}_{1;1}}^{\mathbf{g}_{M;1}} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = \sum_{j=1}^M \mathbf{1}_{\mathbb{N}_{>M}}(j) \left[\frac{g_{j;1}}{g_{j;1} + \theta_N} \right]^2 \left\| \sum_{i>M} \langle \beta_1(\mathbf{g}_{j;1}), \mathbf{g}_{i;1} \rangle_{\mathcal{H}} \mathbf{g}_{i;1} \right\|_{\mathcal{H}}^2 = 0. \quad (4.131)$$

Term T_4 : Analog zu den Überlegungen bei der Herleitung der Rate von T_4 in Satz 4.28 und zu den Umformungen bei Term T_3 erhalten wir mit $M = M_N \rightarrow \infty$:

$$\left\| \prod_{\mathcal{J}_{M;1}^c} \beta_1 \left[\pi_1^\dagger \prod_{\mathbf{g}_{1;1}}^{\mathbf{g}_{M;1}} - \mathbb{I}_{\mathcal{H}} \right] \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \leq \sum_{i,j=1}^M \left[\frac{\theta_N}{g_{j;1} + \theta_N} \right]^2 \langle \beta_1(\mathbf{g}_{j;1}), \mathbf{g}_{i;1} \rangle_{\mathcal{H}}^2 \lesssim \theta_N^2 g_{M;1}^{-2} \|\beta_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2. \quad (4.132)$$

Setzen wir (4.129) bis (4.132) schließlich in (4.128) ein, ergibt sich unter den Voraussetzungen $\theta_N = O(K^{-\beta/2})$ und $g_{M;1}^{-1} M^\beta = O(K^\beta)$ insgesamt (4.127). \square

Beispiel 4.52. Es seien alle Voraussetzungen von Satz 4.51 erfüllt und es gelte $\|\alpha_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}} \leq c$ sowie $\|\beta_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}} \leq c$ für ein $c \in [0, 1)$. Nun bestimmen wir das asymptotische Verhalten der Folgen $(K_N)_N, (L_N)_N \subseteq \mathbb{N}$ sowie $(\vartheta_N)_N \subseteq (0, \infty)$ aus Lemma 4.46 (b) und der Folgen $(M_N)_N \subseteq \mathbb{N}$ sowie $(\theta_N)_N \subseteq (0, \infty)$ aus Satz 4.51 (siehe hierzu auch die Beispiele 4.31). Diese Folgen müssen die in Lemma 4.46 bzw. Satz 4.51 erwähnten Voraussetzungen erfüllen und so gewählt werden, dass $(K_N)_N$ und $(M_N)_N$ schnellstmöglichst wachsen. Hierzu verlangen wir für die Folgen $(K_N)_N, (L_N)_N$ sowie $(c_{L,K})_N$ aus Lemma 4.46 der Einfachheit halber $K = K_N \asymp N^{\tilde{K}}, L = L_N \asymp N^{\tilde{L}}$ sowie $c_{L,K} \asymp N^{\tilde{J}}$ für gewisse $\tilde{K}, \tilde{L} \in (0, 1)$ mit $\tilde{J} = \tilde{J}(\tilde{K}, \tilde{L}) = b\tilde{L} - a\tilde{K}$ für feste $a, b \geq 0$. Dabei folgt aus $c_{L,K} = O(K^{-1}L)$ sowie $c_{L,K} = \Omega(\sqrt{L^3 N^{-1}})$: $\tilde{J} \in [\frac{1}{2}(3\tilde{L} - 1), \tilde{L} - \tilde{K}]$, womit sowohl $1 - 2a\tilde{K} \geq (3 - 2b)\tilde{L}$ als auch $(b - 1)\tilde{L} \leq (1 - a)\tilde{K}$ gelten muss. Für die zur Eigenfunktionenfolge $(\mathbf{g}_{j;1})_j$ gehörende o.B.d.A. monoton fallende Eigenwertfolge $(g_{j;1})_j$ von $\pi_1 \pi_1^* = \alpha_1 \alpha_1^*$ fordern wir außerdem $g_{N;1} \asymp N^{-d}$ für ein festes $d > 1$, und für die Folge $(M_N)_N$ aus Satz 4.51 fordern wir $(M_N)_N \asymp N^{\tilde{M}}$ für ein $\tilde{M} \in (0, 1)$.

Nun geben wir die Raten der Schätzfehler der Schätzer für α_1 und β_1 an, wobei zunächst \tilde{K} und \tilde{L} zu bestimmen sind. $K = \Xi(1, \sqrt[3]{L^{-1}N})$ impliziert $\tilde{K} \in (0, \frac{1-\tilde{L}}{3})$ und aus $c_{L,K}^{-1} \sqrt{KL^3 N^{-1}} \asymp N^{(\frac{1}{2}+a)\tilde{K} + (\frac{3}{2}-b)\tilde{L} - \frac{1}{2}}$ sowie aus den Überlegungen in Beispiel 4.47 folgt $\sum_{l>L} \|\pi_l\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}} \leq \sum_{l>L} c^l \asymp c^{N^{\tilde{L}}} = O(c_{L,K}^{-1} \sqrt{KL^3 N^{-1}})$. Außerdem führt $\vartheta_N = O(c_{L,K}^{-2} K^{-\beta})$ zu $\vartheta_N = O(N^{-(2\tilde{J} + \tilde{K}\beta)})$, aus $\theta_N = O(K^{-\beta/2})$ folgt $\theta_N = O(N^{-\beta\tilde{K}/2})$ und aus $g_{M;1}^{-1} M^\beta \asymp N^{(\beta+d)\tilde{M}} = O(K^\beta)$ folgt $\tilde{M} \leq \frac{\beta\tilde{K}}{\beta+d} \in (0, 1)$. Für feste \tilde{K} und \tilde{L} erfüllen $(\vartheta_N)_N, (\theta_N)_N$ und $(M_N)_N$ stets die geforderten Voraussetzungen, falls $\vartheta_N := N^{\tilde{K}(2a-\beta)-2b\tilde{L}}$ sowie $\theta_N := N^{-\frac{\beta\tilde{K}}{2}}$ für alle $N \in \mathbb{N}$ und $\tilde{M} := \frac{\beta\tilde{K}}{\beta+d}$ gelten, wobei \tilde{M} bereits optimal gewählt ist. Nach Definition der Schätzer $\hat{\alpha}_{1;L,K,M}$ sowie wegen $\alpha_1 = \pi_1$ ist für die Angabe einer konkreten oberen Schranke für den quadratischen Schätzfehler des Schätzers für α_1 nach Lemma 4.46 (b) noch $c_{L,K}^{-1} \sqrt{KL^3 N^{-1}} = O(K^{-2(\beta+1)})$ zu zeigen. Unter Einhaltung bisheriger Voraussetzungen und per Definition genannter Folgen sind \tilde{K}, \tilde{L} somit so zu wählen, dass gilt:

$$\left(\frac{1}{2} + a\right)\tilde{K} + \left(\frac{3}{2} - b\right)\tilde{L} - \frac{1}{2} \leq -(2\beta + 1)\tilde{K} \iff \tilde{K} \leq \frac{1 + (2b - 3)\tilde{L}}{3 + 2a + 4\beta}. \quad (4.133)$$

$\tilde{L} \in (0, 1)$ ist nun so zu wählen, dass $\tilde{K} \in (0, 1), \tilde{K} < \frac{1-\tilde{L}}{3}$ sowie (4.133) gilt. Anschließend kann $\tilde{K} \in (0, 1)$ größtmöglich gewählt werden. Bei der Wahl von \tilde{L} und \tilde{K} sind die folgenden Fälle zu berücksichtigen.

1.Fall: $b \in [0, 1]$. In diesem Fall gilt (4.133), $\tilde{K} < \frac{1-\tilde{L}}{3}$ und $\tilde{K} \in (0, 1)$ genau dann, wenn $\tilde{L} \in (0, \frac{1}{3-2b})$ gilt. Wegen $\tilde{K} \leq \frac{1+(2b-3)\tilde{L}}{3+2a+4\beta} < \frac{1-\tilde{L}}{3}$ für alle $b \in [0, 1]$ und $\tilde{L} \in (0, \frac{1}{3-2b})$ setzen wir $\tilde{K} := \frac{1+(2b-3)c}{3+2a+4\beta}$ für möglichst kleine $\tilde{L} := c \in (0, \frac{1}{3-2b})$ an, wobei wegen $1 - 2a\tilde{K} \geq (3-2b)\tilde{L}$ und $(b-1)\tilde{L} \leq (1-a)\tilde{K}$ per Definition von \tilde{K}, \tilde{L} sowohl $c \leq \frac{3+2a+4\beta}{a+(3-2b)(3+2a+4\beta)}$ als auch $[(3+2a+4\beta)(b-1)]c \geq 1-a$ gelten muss. Falls c diese Bedingungen für gegebene a, b und β erfüllt, gilt nach Satz 4.51 (bzw. Lemma 4.46 (b))

$$\|\hat{\alpha}_{1;L,K} - \alpha_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}\left(N^{-\frac{2\beta[1+(2b-3)c]}{3+2a+4\beta}}\right) \quad (4.134)$$

und wegen $M \asymp N^{\frac{\beta\tilde{K}}{\beta+d}}$ gilt:

$$\|\hat{\beta}_{1;L,K} - \beta_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}\left(N^{-\frac{2\beta^2[1+(2b-3)c]}{(\beta+d)(3+2a+4\beta)}}\right). \quad (4.135)$$

Gelte bspw. $a = \frac{5}{2}, b = \frac{1}{2}, \beta = 2$ sowie $d = 3$, so gilt mit $c = \frac{1}{100}$

$$\|\hat{\alpha}_{1;L,K} - \alpha_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(N^{-\frac{196}{800}}) \quad \text{und} \quad \|\hat{\beta}_{1;L,K} - \beta_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(N^{-\frac{196}{2000}}).$$

2.Fall: $b \in (1, \frac{3}{2})$. Hier gilt (4.133), $\tilde{K} < \frac{1-\tilde{L}}{3}$ und $\tilde{K} \in (0, 1)$ genau dann, wenn $\tilde{L} \in (0, 1)$ gilt. Dabei setzen wir wieder $\tilde{K} := \frac{1+(2b-3)c}{3+2a+4\beta}$ für möglichst kleine $\tilde{L} := c \in (0, 1)$ an, da $(0, 1) \ni \tilde{L} \mapsto \frac{1-\tilde{L}}{3}$ und $(0, 1) \ni \tilde{L} \mapsto \frac{1+(2b-3)\tilde{L}}{3+2a+4\beta}$ aus (4.133) für $b \in (1, \frac{3}{2})$ streng monoton fallende Funktionen sind und $\tilde{K} \leq \frac{1+(2b-3)\tilde{L}}{3+2a+4\beta} < \frac{1-\tilde{L}}{3}$ für alle $b \in (1, \frac{3}{2})$ für hinreichend kleine \tilde{L} gilt. Falls c die Bedingungen im 1.Fall für gegebene a, b, β erfüllt, gilt nach Satz 4.51 (4.134) sowie (4.135) mit $b \in (1, \frac{3}{2})$ und für $a = \frac{5}{2}, b = \frac{5}{4}, \beta = 2$ sowie $d = 3$ mit $c = \frac{1}{100}$

$$\|\hat{\alpha}_{1;L,K} - \alpha_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(N^{-\frac{199}{800}}) \quad \text{und} \quad \|\hat{\beta}_{1;L,K} - \beta_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(N^{-\frac{199}{2000}}).$$

3.Fall: $b = \frac{3}{2}$. Hier gilt (4.133), $\tilde{K} < \frac{1-\tilde{L}}{3}$ sowie $\tilde{K} \in (0, 1)$ für alle $\tilde{L} \leq \frac{2a+4\beta}{3+2a+4\beta}$ und $\frac{2a+4\beta}{3+2a+4\beta} \in (0, 1)$. Für $\tilde{L} := c \in (0, \frac{2a+4\beta}{3+2a+4\beta})$, falls c die Voraussetzungen im 1.Fall erfüllt, ist $\tilde{K} := \frac{1}{3+2a+4\beta}$ die optimale Wahl und Satz 4.51 führt wieder zu den Raten (4.134) sowie (4.135) mit $b = \frac{3}{2}$. Für $a = \frac{5}{2}, b = \frac{3}{2}, \beta = 2, d = 3$ mit $c = \frac{1}{100}$ gilt dann

$$\|\hat{\alpha}_{1;L,K} - \alpha_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(N^{-\frac{200}{800}}) \quad \text{und} \quad \|\hat{\beta}_{1;L,K} - \beta_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(N^{-\frac{200}{2000}}).$$

4.Fall: $b \in (\frac{3}{2}, \frac{7}{4})$. Hier sind (4.133), $\tilde{K} < \frac{1-\tilde{L}}{3}$ und $\tilde{K} \in (0, 1)$ genau dann erfüllt, wenn $\tilde{L} \in (0, 1)$ gilt. Da die Funktionen $(0, 1) \ni \tilde{L} \mapsto \frac{1-\tilde{L}}{3}$ und $(0, 1) \ni \tilde{L} \mapsto \frac{1+(2b-3)\tilde{L}}{3+2a+4\beta}$ aus (4.133) für alle $b > \frac{3}{2}$ einen Schnittpunkt in $\tilde{L} = \frac{a+2\beta}{3(b-1)+a+2\beta} \in (0, 1)$ haben, setzen wir, wegen $\tilde{K} < \frac{1-\tilde{L}}{3}$, folglich $\tilde{K} := \frac{1+(2b-3)c}{3+2a+4\beta}$ mit $\tilde{L} := c \in (0, \frac{a+2\beta}{3(b-1)+a+2\beta})$ für möglichst großes c an, das die Bedingungen aus dem 1.Fall erfüllt. Wegen $b > \frac{3}{2}$ und da $c \in (0, \frac{a+2\beta}{3(b-1)+a+2\beta})$ gilt (und möglichst groß sein soll), ist $c \leq \frac{3+2a+4\beta}{a+(3-2b)(3+2a+4\beta)}$ nur für $b \in (\frac{3}{2}, \frac{7}{4})$ gültig, wobei a für solche b im Vergleich zu β groß sein muss. Für alle c , die diese Bedingungen erfüllen, führt Satz 4.51 auch im Fall $b \in (\frac{3}{2}, \frac{7}{4})$ zu den Raten (4.134) und (4.135). Gehen wir nun bspw. von $a = 4, b = \frac{8}{5}, \beta = 2, d = 3$ aus, gilt $\frac{a+2\beta}{3(b-1)+a+2\beta} = \frac{40}{49}$. Bspw. mit $c = \frac{3}{4}$ gilt dann

$$\|\hat{\alpha}_{1;L,K} - \alpha_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(N^{-\frac{230}{800}}) \quad \text{und} \quad \|\hat{\beta}_{1;L,K} - \beta_1\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(N^{-\frac{230}{2000}}).$$

5. Fall: $b \geq \frac{7}{4}$. Die Vorgehensweise zur Herleitung von \tilde{K} und \tilde{L} wäre identisch mit 4. Fall. Da aber die geforderte Bedingung an c dort für kein $\beta \geq \frac{7}{4}$ erfüllt ist, lassen sich hier keine Raten für die Schätzfehler der Schätzer für die Operatoren α_1 und β_1 angeben. ♦

Bemerkung 4.53. Die Motivation, von der in Beispiel (4.52) formulierten Variable \tilde{J} auszugehen, rührt daher, dass $(c_{L,K})_K$ für festes \tilde{L} die Eigenwertfolge von \mathfrak{S}_L ist und $(c_{L,K})_L$ für festes K gemäß (4.82) asymptotisch durch die Folge $(L_N)_N$ nach oben beschränkt ist. Ferner ist ein Nachweis für die Erfüllbarkeit von $c_{L,K} \asymp N^{\tilde{J}}$, und dafür, dass \tilde{J} die genannte Gestalt besitzt, mit Hilfe der uns bislang vorliegenden Informationen nicht möglich. Allerdings ist weder $c_{L,K} \asymp N^{\tilde{J}}$ noch die Gestalt von \tilde{J} von vornherein ausgeschlossen. ♦

4.4.3 Operatorschätzung im FGARCH($\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$)-Modell mit $\max(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) > 1$

Für die Herleitung der Schätzer für die Operatoren einer FGARCH($\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$)-Zeitreihe mit $\mathfrak{r} := \max(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) > 1$ betrachten wir den Zusammenhang zwischen den Operatoren in der Darstellung als linearem Prozess und in der Darstellung als invertierte Zeitreihe der durch die FGARCH($\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$)-Zeitreihe $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_k)_k$ induzierten FARMA($\mathfrak{r}, \mathfrak{q}$)-Zeitreihe $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_k)_k$ zu den Operatoren $\alpha_1, \dots, \alpha_{\mathfrak{p}}, \beta_1, \dots, \beta_{\mathfrak{q}}$. Wegen $\mathcal{Z}_{k-i} = \nu_{k-i} + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(\nu_{k-i-j})$ f.s. für alle k mit $\psi_0 := \mathbb{I}_{\mathcal{H}}$ und $\alpha_i = 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} = \beta_j$ für alle $i > \mathfrak{p}$ sowie $j > \mathfrak{q}$, gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_k &= \nu_k + \sum_{i=1}^{\mathfrak{r}} (\alpha_i + \beta_i)(\mathcal{Z}_{k-i}) - \sum_{i=1}^{\mathfrak{q}} \beta_i(\nu_{k-i}) \\ &= \nu_k + \sum_{i=1}^{\mathfrak{r}} \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha_i + \beta_i) \psi_j(\nu_{k-i-j}) - \sum_{i=1}^{\mathfrak{q}} \beta_i(\nu_{k-i}) \\ &= \nu_k + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\alpha_i + \sum_{j=1}^{i-1} (\alpha_j + \beta_j) \psi_{i-j} \right] (\nu_{k-j}) \end{aligned}$$

f.s. für alle k . Fordern wir, dass die Parameter δ und $\alpha_1, \dots, \alpha_{\mathfrak{p}}, \beta_1, \dots, \beta_{\mathfrak{q}}$ der FGARCH($\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$)-Zeitreihe \mathcal{X} die Annahme 4.8 und deren Zeitreihe $(\varepsilon_k)_k$ aus Innovationen die Annahme 4.9 erfüllen, führt die Argumentation in Bemerkung 4.49 zu

$$\psi_i = \begin{cases} \alpha_1, & i = 1, \\ \alpha_i + \sum_{j=1}^{\min(i-1, \mathfrak{r})} (\alpha_j + \beta_j) \psi_{i-j}, & i > 1. \end{cases} \quad (4.136)$$

Wegen $\nu_k = \mathcal{Z}_k - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i(\mathcal{Z}_{k-i})$ gilt zudem

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_k &= \nu_k + \sum_{i=1}^{\mathfrak{r}} (\alpha_i + \beta_i)(\mathcal{Z}_{k-i}) - \sum_{i=1}^{\mathfrak{q}} \beta_i(\nu_{k-i}) \\ \iff \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i(\mathcal{Z}_{k-i}) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\alpha_i + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j \pi_{i-j} \right] (\mathcal{Z}_{k-i}), \end{aligned}$$

f.s. für alle k , woraus nach Bemerkung 4.49 folgt:

$$\pi_i = \begin{cases} \alpha_1, & i = 1, \\ \alpha_i + \sum_{j=1}^{\min(i-1, \mathfrak{q})} \beta_j \pi_{i-j}, & i > 1. \end{cases} \quad (4.137)$$

Dabei verwenden wir für die Herleitung der Schätzer für die Operatoren im FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Modell mit $\mathbf{r} := \max(\mathbf{p}, \mathbf{q}) > 1$ ausschließlich (4.137), wobei wir analog zum FGARCH(1, 1)-Modell auf (4.136) verzichten, da jedes ψ_i für $i > 1$ zusätzlich die zu schätzenden Operatoren $\alpha_1, \dots, \alpha_{\min(i-1, \mathbf{q})}$ beinhaltet. Aus (4.137) folgt wegen $\alpha_i = 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}$ für $i > \mathbf{p}$

$$\pi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^{\mathbf{q}} \beta_j \pi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-j} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-1} & \pi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-2} & \cdots & \pi_{\mathbf{p}} \end{bmatrix}^T =: \beta_{[\mathbf{q}]} \boldsymbol{\pi}_{[\mathbf{p}, \mathbf{q}]}. \quad (4.137)$$

Die Lösung $\beta_{[\mathbf{q}]}$ dieser Gleichung ist nach Satz 4.22 genau dann eindeutig, wenn das Bild von $\boldsymbol{\pi}_{[\mathbf{p}, \mathbf{q}]} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}^{\mathbf{q}}}$ dicht in $\mathcal{H}^{\mathbf{q}}$ liegt, was jedoch wegen $\mathcal{H} \subsetneq \mathcal{H}^{\mathbf{q}}$ unmöglich ist. Für die Herleitung der Schätzer für $\beta_1, \dots, \beta_{\mathbf{q}}$ mit $\boldsymbol{\pi}_{[\mathbf{p}+\mathbf{q}, \mathbf{q}]}^T := [\pi_{\mathbf{p}+2\mathbf{q}-1} \ \pi_{\mathbf{p}+2\mathbf{q}-2} \ \cdots \ \pi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}]$ eignet sich aber bspw. die Gleichung

$$\boldsymbol{\pi}_{[\mathbf{p}+\mathbf{q}, \mathbf{q}]}^T = \beta_{[\mathbf{q}]} \begin{bmatrix} \pi_{\mathbf{p}+2\mathbf{q}-2} & \pi_{\mathbf{p}+2\mathbf{q}-3} & \cdots & \pi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-1} \\ \pi_{\mathbf{p}+2\mathbf{q}-3} & \pi_{\mathbf{p}+2\mathbf{q}-4} & \cdots & \pi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \pi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-1} & \pi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-2} & \cdots & \pi_{\mathbf{p}} \end{bmatrix} =: \beta_{[\mathbf{q}]} \Pi_{[\mathbf{p}, \mathbf{q}]}, \quad (4.138)$$

wobei sich die Formulierung einer allgemein gültigen hinreichenden Bedingung für dichtes Bild von $\Pi_{[\mathbf{p}, \mathbf{q}]}$ in $\mathcal{H}^{\mathbf{q}}$ schwierig gestaltet. Anhand des folgenden Beispiels wird allerdings deutlich, dass zumindest für alle $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}$ Operatoren $\alpha_1, \dots, \alpha_{\mathbf{p}}, \beta_1, \dots, \beta_{\mathbf{q}}$ im FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Modell existieren, sodass das Bild von $\Pi_{[\mathbf{p}, \mathbf{q}]}$ dicht liegt.

Beispiel 4.54. Es seien $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}$ und für die Operatoren im FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Modell gelte $\alpha_i = 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} = \beta_j$ für alle i, j mit $i \neq \mathbf{p}, j \neq \mathbf{q}$ und $\alpha_{\mathbf{p}} = \beta_{\mathbf{q}} =: \gamma$, wobei $\gamma \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}, \gamma \neq 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}$ sowie $\|\gamma\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}} < 1$ gelte und γ dichtes Bild habe. Dann gilt wegen (4.109) für alle $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}$:

$$\Pi_{[\mathbf{p}, \mathbf{q}]} = \begin{bmatrix} 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} & \cdots & 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} & \gamma^2 & 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \gamma^2 & \ddots & \ddots & \ddots & 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} \\ 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} & \cdots & \cdots & 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} & \gamma \end{bmatrix} \implies \Pi_{[\mathbf{p}, \mathbf{q}]}^* = \begin{bmatrix} 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} & \cdots & 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} & (\gamma^*)^2 & 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (\gamma^*)^2 & \ddots & \ddots & \ddots & 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} \\ 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} & \cdots & \cdots & 0_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}} & \gamma^* \end{bmatrix}$$

Weil γ^* und $(\gamma^*)^2$ injektiv sind, ist die operatorwertige Matrix $\Pi_{[\mathbf{p}, \mathbf{q}]}^*$ per Definition injektiv, womit das Bild von $\Pi_{[\mathbf{p}, \mathbf{q}]}$ dicht liegt. \blacklozenge

Für $\beta_{[\mathbf{q}]}$ setzen wir analog zum FGARCH(1, 1)-Modell den folgenden Schätzer an:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{[\mathbf{q}; L, K, M]} &:= \hat{\boldsymbol{\pi}}_{[\mathbf{p}+\mathbf{q}, \mathbf{q}; L, K]}^T \hat{\Pi}_{[\mathbf{p}, \mathbf{q}; L, K]}^{\dagger} \prod_{\hat{\mathbf{g}}_{1; L, K}^{(\mathbf{p}, \mathbf{q})}}^{\hat{\mathbf{g}}_{M; L, K}^{(\mathbf{p}, \mathbf{q})}} \\ &= \hat{\boldsymbol{\pi}}_{[\mathbf{p}+\mathbf{q}, \mathbf{q}; L, K]}^T \hat{\Pi}_{[\mathbf{p}, \mathbf{q}; L, K]}^* \left(\hat{\Pi}_{[\mathbf{p}, \mathbf{q}; L, K]} \hat{\Pi}_{[\mathbf{p}, \mathbf{q}; L, K]}^* + \theta_N \mathbb{I}_{\mathcal{H}^{\mathbf{q}}} \right)^{-1} \prod_{\hat{\mathbf{g}}_{1; L, K}^{(\mathbf{p}, \mathbf{q})}}^{\hat{\mathbf{g}}_{M; L, K}^{(\mathbf{p}, \mathbf{q})}}. \end{aligned} \quad (4.139)$$

Dabei steht $(M_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ für eine Folge mit $M = M_N \rightarrow \infty$, $(\theta_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \infty)$ steht für eine Folge mit $\theta_N \rightarrow 0$,

$$\hat{\boldsymbol{\pi}}_{[\mathbf{p}+\mathbf{q}, \mathbf{q}; L, K]}^T := \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\pi}}_{L, K}^{(\mathbf{p}+2\mathbf{q}-1)} & \hat{\boldsymbol{\pi}}_{L, K}^{(\mathbf{p}+2\mathbf{q}-2)} & \cdots & \hat{\boldsymbol{\pi}}_{L, K}^{(\mathbf{p}+\mathbf{q})} \end{bmatrix} \quad (4.140)$$

ist der Schätzer für $\boldsymbol{\pi}_{[\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{q}]}^T = [\pi_{\mathbf{p}+2\mathbf{q}-1} \ \pi_{\mathbf{p}+2\mathbf{q}-2} \ \cdots \ \pi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}]$ und

$$\hat{\Pi}_{[\mathbf{p},\mathbf{q};L,K]} := \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}^{(\mathbf{p}+2\mathbf{q}-2)} & \hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}^{(\mathbf{p}+2\mathbf{q}-3)} & \cdots & \hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}^{(\mathbf{p}+\mathbf{q}-1)} \\ \hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}^{(\mathbf{p}+2\mathbf{q}-3)} & \hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}^{(\mathbf{p}+2\mathbf{q}-4)} & \cdots & \hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}^{(\mathbf{p}+\mathbf{q}-2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}^{(\mathbf{p}+\mathbf{q}-1)} & \hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}^{(\mathbf{p}+\mathbf{q}-2)} & \cdots & \hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}^{(\mathbf{p})} \end{bmatrix} \quad (4.141)$$

steht für den Schätzer für $\Pi_{[\mathbf{p},\mathbf{q};L,K]}$ mit $\hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}^{(i)}$ aus (4.98) für alle i . Ferner steht $(\hat{\mathbf{g}}_{j;L,K}^{(\mathbf{p},\mathbf{q})})_{j \in \mathbb{N}}$ für die Eigenfunktionenfolge mit der zugehörigen o.B.d.A. monoton fallenden Eigenwertfolge $(\hat{g}_{j;L,K}^{(\mathbf{p},\mathbf{q})})_{j \in \mathbb{N}}$ von $\hat{\Pi}_{[\mathbf{p},\mathbf{q};L,K]} \hat{\Pi}_{[\mathbf{p},\mathbf{q};L,K]}^* \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathbf{q}}}$ für alle $\mathbf{p}, \mathbf{q}, L, K \in \mathbb{N}$.

Aufgrund von (4.137) kommt außerdem

$$\hat{\alpha}_{i;L,K,M} := \hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}^{(i)} - \sum_{j=1}^{\min(i-1,\mathbf{q})} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{[\mathbf{q};L,K,M]}^{(j)} \hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}^{(i-j)} \quad (4.142)$$

als Schätzer für α_i für alle $i = 2, \dots, \mathbf{p}$ mit $\hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}^{(1)}, \dots, \hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}^{(\mathbf{p})}$ aus (4.98) in Frage, wobei $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{[\mathbf{q};L,K,M]}^{(j)}$ die j -te Komponente mit $j = 1, \dots, \mathbf{q}$ des Schätzers $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{[\mathbf{q};L,K,M]}$ ist.

Bevor wir uns dem Konsistenzresultat für die Operatoren im FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Modell widmen, analysieren wir die eben definierten Größen. Gemäß Lemma 2.16 handelt es sich bei dem Vektor $\boldsymbol{\pi}_{[\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{q}]}^T$ und dem zugehörigen Schätzer $\hat{\boldsymbol{\pi}}_{[\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{q};L,K]}^T$ aus (4.140) um Elemente von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathbf{q}}, \mathcal{H}}$ für alle $\mathbf{p}, \mathbf{q}, K, L \in \mathbb{N}$ mit

$$\left\| \hat{\boldsymbol{\pi}}_{[\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{q};L,K]}^T - \boldsymbol{\pi}_{[\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{q}]}^T \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathbf{q}}, \mathcal{H}}}^2 = \sum_{i=1}^{\mathbf{q}} \left\| \hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}^{(\mathbf{p}+2\mathbf{q}-i)} - \pi_{\mathbf{p}+2\mathbf{q}-i} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta}) \quad (4.143)$$

für alle $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}$ nach Lemma 4.46 (b). Ferner gilt per Definition der operatorwertigen Matrizen $\hat{\Pi}_{[\mathbf{p},\mathbf{q};L,K]}$ wegen $\hat{\Pi}_{[\mathbf{p},\mathbf{q};L,K]}^T = \hat{\Pi}_{[\mathbf{p},\mathbf{q};L,K]}$

$$\hat{\Pi}_{[\mathbf{p},\mathbf{q};L,K]} \hat{\Pi}_{[\mathbf{p},\mathbf{q};L,K]}^* = \left(\sum_{k=1}^{\mathbf{q}} \hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}^{(\mathbf{p}+2\mathbf{q}-(i+k))} (\hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}^{(\mathbf{p}+2\mathbf{q}-(j+k))})^* \right)_{i,j=1,\dots,\mathbf{q}}$$

für alle $\mathbf{p}, \mathbf{q}, K, L \in \mathbb{N}$ und analog dazu

$$\Pi_{[\mathbf{p},\mathbf{q}]} \Pi_{[\mathbf{p},\mathbf{q}]}^* = \left(\sum_{k=1}^{\mathbf{q}} \pi_{\mathbf{p}+2\mathbf{q}-(i+k)} \pi_{\mathbf{p}+2\mathbf{q}-(j+k)}^* \right)_{i,j=1,\dots,\mathbf{q}}$$

für alle $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}$. Dabei gilt nach Lemma 4.46 (b) für alle \mathbf{p}, \mathbf{q} auch hier:

$$\begin{aligned} & \left\| \hat{\Pi}_{[\mathbf{p},\mathbf{q};L,K]} \hat{\Pi}_{[\mathbf{p},\mathbf{q};L,K]}^* - \Pi_{[\mathbf{p},\mathbf{q}]} \Pi_{[\mathbf{p},\mathbf{q}]}^* \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathbf{q}}}}^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{\mathbf{q}} \left\| \sum_{k=1}^{\mathbf{q}} \hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}^{(\mathbf{p}+2\mathbf{q}-(i+k))} (\hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}^{(\mathbf{p}+2\mathbf{q}-(j+k))})^* - \pi_{\mathbf{p}+2\mathbf{q}-(i+k)} \pi_{\mathbf{p}+2\mathbf{q}-(j+k)}^* \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \\ &\lesssim \sum_{i,j,k=1}^{\mathbf{q}} \left(\left\| \hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}^{(\mathbf{p}+2\mathbf{q}-(i+k))} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \left\| (\hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}^{(\mathbf{p}+2\mathbf{q}-(j+k))})^* - \pi_{\mathbf{p}+2\mathbf{q}-(j+k)}^* \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| \hat{\boldsymbol{\pi}}_{L,K}^{(\mathbf{p}+2\mathbf{q}-(i+k))} - \pi_{\mathbf{p}+2\mathbf{q}-(i+k)} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \left\| \pi_{\mathbf{p}+2\mathbf{q}-(j+k)}^* \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \right) \end{aligned}$$

$$= O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta}). \quad (4.144)$$

Aus diesem Resultat und den Überlegungen bei der Herleitung des Schätzers für β_1 im FGARCH(1, 1)-Modell folgt für die zur Eigenfunktionenfolge $(\mathfrak{g}_{j;\mathfrak{p},\mathfrak{q}})_j$ gehörende o.B.d.A. monoton fallende Eigenwertfolge $(g_{j;\mathfrak{p},\mathfrak{q}})_j$ von $\Pi_{[\mathfrak{p},\mathfrak{q}]} \Pi_{[\mathfrak{p},\mathfrak{q}]}^*$ für alle $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} (\hat{g}_{j;L,K}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{q})} - g_{j;\mathfrak{p},\mathfrak{q}})^2 = O(K^{-2\beta}) \quad (4.145)$$

und im Fall $g_{M;\mathfrak{p},\mathfrak{q}} = \Xi[K^{-\beta/2}, 1)$ gilt für eine Folge $(M_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $M = M_N \rightarrow \infty$:

$$\hat{g}_{M;L,K}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{q})} = O_{\mathbb{P}}(g_{M;\mathfrak{p},\mathfrak{q}}) \quad \text{sowie} \quad g_{M;\mathfrak{p},\mathfrak{q}} = O_{\mathbb{P}}(\hat{g}_{M;L,K}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{q})}). \quad (4.146)$$

Ferner, falls der Operator $\Pi_{[\mathfrak{p},\mathfrak{q}]} \Pi_{[\mathfrak{p},\mathfrak{q}]}^*$ die Annahme 4.18 erfüllt (Teil (a) ist bereits nach Definition und Eigenschaften 2.8 (f) erfüllt), gilt (siehe (4.121) bis (4.125)):

$$\sup_{j \leq M} \left\| (\hat{\mathfrak{g}}_{j;L,K}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{q})})''' - \mathfrak{g}_{j;\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \right\|_{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(g_{M;\mathfrak{p},\mathfrak{q}}^{-2} K^{-2\beta}). \quad (4.147)$$

Nun geben wir ein Resultat für die Schätzung der Operatoren im FGARCH($\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$)-Modell mit $\mathfrak{r} := \max(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) > 1$ an.

Satz 4.55. *Es sei $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine \mathcal{H} -wertige FGARCH($\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$)-Zeitreihe mit $\mathfrak{r} := \max(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) > 1$, die die Eigenschaften auf S.33 f. hat. Ferner gelten die eingangs von Lemma 4.46 sowie die in Lemma 4.46 (b) genannten Notationen und Voraussetzungen. Dann gilt für die Schätzer $\hat{\alpha}_{1;L,K}$ aus (4.117) mit $\beta > 0$ aus Lemma 4.46:*

$$\|\hat{\alpha}_{1;L,K} - \alpha_1\|_{\mathcal{S}^{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta}). \quad (4.148)$$

Ferner liege das Bild von $\Pi_{[\mathfrak{p},\mathfrak{q}]}$ dicht in $\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}$, $\Pi_{[\mathfrak{p},\mathfrak{q}]} \Pi_{[\mathfrak{p},\mathfrak{q}]}^$ erfülle die Annahme 4.18, $(\theta_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \infty)$ sei eine Folge mit $\theta_N = O(K^{-\beta/2})$ und $(M_N)_{N \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ sei eine Folge mit $g_{M;\mathfrak{p},\mathfrak{q}}^{-2} M^{\beta} = O(K^{\beta})$, wobei $(g_{j;\mathfrak{p},\mathfrak{q}})_{j \in \mathbb{N}}$ die zur Eigenfunktionenfolge $(\mathfrak{g}_{j;\mathfrak{p},\mathfrak{q}})_j$ gehörende o.B.d.A. monoton fallende Eigenwertfolge von $\Pi_{[\mathfrak{p},\mathfrak{q}]} \Pi_{[\mathfrak{p},\mathfrak{q}]}^*$ sei. Außerdem erfülle $(\beta_{[\mathfrak{q}]}, (\phi_{ij;\mathfrak{p},\mathfrak{q}})_{i,j \in \mathbb{N}})$ die Annahme 4.24 für $\beta > 0$, wobei $(\phi_{ij;\mathfrak{p},\mathfrak{q}})_{i,j}$ die durch die Eigenfunktionenfolgen $(\mathfrak{g}_{j;\mathfrak{p},\mathfrak{q}})_j$ und $(\mathfrak{c}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_{0;\mathcal{X}}$ induzierte ONB von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}, \mathcal{H}}$ sei. Dann gilt für alle Komponenten $j = 1, \dots, \mathfrak{q}$ von $\hat{\beta}_{[\mathfrak{q};L,K,M]}$ aus (4.139)*

$$\left\| \hat{\beta}_{[\mathfrak{q};L,K,M]}^{(j)} - \beta_j \right\|_{\mathcal{S}^{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(M^{-2\beta}), \quad (4.149)$$

und für $\hat{\alpha}_{i;L,K,M}$ aus (4.142) gilt für alle $i = 2, \dots, \mathfrak{p}$

$$\|\hat{\alpha}_{i;L,K,M} - \alpha_i\|_{\mathcal{S}^{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(M^{-2\beta}). \quad (4.150)$$

Beweis. (4.148) wurde unter gleichen Voraussetzungen bereits in Satz 4.51 verifiziert.

Nun zeigen wir die Gültigkeit von (4.149) für alle $j = 1, \dots, \mathfrak{q}$. Per Definition von $\hat{\beta}_{[\mathfrak{q};L,K,M]}$ aus (4.139), wegen (4.138) sowie $\mathcal{J}_{M;\mathfrak{p},\mathfrak{q}} := \{\phi_{ij;\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \mid 1 \leq i, j \leq M\}$, da $(\beta_{[\mathfrak{q}]}, (\phi_{ij;\mathfrak{p},\mathfrak{q}})_{i,j})$

die Annahme 4.24 für $\beta > 0$ erfüllt, und wegen $\hat{\Pi}_{[p,q;L,K]}^\dagger = \hat{\Pi}_{[p,q;L,K]}^* (\hat{\Pi}_{[p,q;L,K]} \hat{\Pi}_{[p,q;L,K]}^*)^{-1} + \theta_N \mathbb{I}_{\mathcal{H}^q}$ gilt wie bei der Argumentation in den Beweisen der Sätze 4.37 und 4.51:

$$\begin{aligned}
& \left\| \hat{\beta}_{[q;L,K,M]} - \beta_{[q]} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^q, \mathcal{H}}}^2 \\
& \lesssim \left\| \hat{\beta}_{[q;L,K,M]} - \prod_{\mathcal{I}_{M;p,q}} \beta_{[q]} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^q, \mathcal{H}}}^2 + \left\| \prod_{\mathcal{I}_{M;p,q}} \beta_{[q]} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^q, \mathcal{H}}}^2 \\
& \lesssim \left\| \hat{\pi}_{[p+q,q;L,K]}^T - \pi_{[p+q,q]}^T \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^q, \mathcal{H}}}^2 \left\| \hat{\Pi}_{[p,q;L,K]}^\dagger \prod_{\hat{\mathfrak{g}}_{1;L,K}^{(p,q)}}^{\hat{\mathfrak{g}}_{M;L,K}^{(p,q)}} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^q}}^2 \\
& \quad + \left\| \pi_{[p+q,q]}^T \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^q, \mathcal{H}}}^2 \left\| \hat{\Pi}_{[p,q;L,K]}^\dagger \prod_{\hat{\mathfrak{g}}_{1;L,K}^{(p,q)}}^{\hat{\mathfrak{g}}_{M;L,K}^{(p,q)}} - \prod_{[p,q]}^\dagger \prod_{\mathfrak{g}_{1;p,q}}^{\mathfrak{g}_{M;p,q}} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^q}}^2 \\
& \quad + \left\| \pi_{[p+q,q]}^T \prod_{[p,q]}^\dagger \prod_{\mathfrak{g}_{1;p,q}}^{\mathfrak{g}_{M;p,q}} - \prod_{\mathcal{I}_{M;p,q}} \beta_{[q]} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^q, \mathcal{H}}}^2 + O(M^{-2\beta}) \\
& \lesssim O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta}) \left\| \hat{\Pi}_{[p,q;L,K]}^\dagger \prod_{\hat{\mathfrak{g}}_{1;L,K}^{(p,q)}}^{\hat{\mathfrak{g}}_{M;L,K}^{(p,q)}} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^q}}^2 + \left\| \hat{\Pi}_{[p,q;L,K]}^\dagger \prod_{\hat{\mathfrak{g}}_{1;L,K}^{(p,q)}}^{\hat{\mathfrak{g}}_{M;L,K}^{(p,q)}} - \prod_{[p,q]}^\dagger \prod_{\mathfrak{g}_{1;p,q}}^{\mathfrak{g}_{M;p,q}} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^q}}^2 \\
& \quad + \left\| \prod_{\mathcal{I}_{M;p,q}} \beta_{[q]} \prod_{[p,q]}^\dagger \prod_{\mathfrak{g}_{1;p,q}}^{\mathfrak{g}_{M;p,q}} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^q, \mathcal{H}}}^2 + \left\| \prod_{\mathcal{I}_{M;p,q}} \beta_{[q]} \left[\prod_{[p,q]}^\dagger \prod_{\mathfrak{g}_{1;p,q}}^{\mathfrak{g}_{M;p,q}} - \mathbb{I}_{\mathcal{H}^q} \right] \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^q, \mathcal{H}}}^2 + O(M^{-2\beta}) \\
& =: O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta}) \cdot T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + O(M^{-2\beta}). \tag{4.151}
\end{aligned}$$

Term T_1 : Wegen (4.146) gilt wie bei der Herleitung der Rate des Terms T_1 in Satz 4.51 für alle K, L, M :

$$\begin{aligned}
\left\| \hat{\Pi}_{[p,q;L,K]}^\dagger \prod_{\hat{\mathfrak{g}}_{1;L,K}^{(p,q)}}^{\hat{\mathfrak{g}}_{M;L,K}^{(p,q)}} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^q}}^2 &= \left\| \left(\hat{\Pi}_{[p,q;L,K]} \hat{\Pi}_{[p,q;L,K]}^* + \theta_N \mathbb{I}_{\mathcal{H}^q} \right)^{-2} \hat{\Pi}_{[p,q;L,K]} \hat{\Pi}_{[p,q;L,K]}^* \prod_{\hat{\mathfrak{g}}_{1;L,K}^{(p,q)}}^{\hat{\mathfrak{g}}_{M;L,K}^{(p,q)}} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^q}}^2 \\
&= \sup_{j \leq M} \frac{\hat{g}_{j;L,K}^{(p,q)}}{(\hat{g}_{j;L,K}^{(p,q)} + \theta_N)^2} = O_{\mathbb{P}}(g_{M;p,q}^{-1}). \tag{4.152}
\end{aligned}$$

Term T_2 : Aus den Umformungen bei der Herleitung der Rate von T_2 in Satz 4.51 und aus (4.145), (4.146) sowie (4.147) folgt:

$$\begin{aligned}
& \left\| \hat{\Pi}_{[p,q;L,K]}^\dagger \prod_{\hat{\mathfrak{g}}_{1;L,K}^{(p,q)}}^{\hat{\mathfrak{g}}_{M;L,K}^{(p,q)}} - \prod_{[p,q]}^\dagger \prod_{\mathfrak{g}_{1;p,q}}^{\mathfrak{g}_{M;p,q}} \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^q}}^2 \\
& \lesssim \sup_{j \leq M} \left| \frac{\sqrt{\hat{g}_{j;L,K}^{(p,q)}}}{\hat{g}_{j;L,K}^{(p,q)} + \theta_N} - \frac{\sqrt{g_{j;p,q}}}{g_{M;p,q} + \theta_N} \right|^2 + M g_{M;p,q}^{-1} \sup_{j \leq M} \left\| (\hat{\mathfrak{g}}_{j;L,K}^{(p,q)})''' - \mathfrak{g}_{j;p,q} \right\|_{\mathcal{H}^q}^2 \\
& \quad + \sup_{j \leq M} \left| \frac{1}{g_{j;p,q} + \theta_N} \right|^2 \left(\left(\sqrt{g_{j;p,q}} - \sqrt{\hat{\mathfrak{g}}_{j;L,K}^{(p,q)}} \right)^2 + \left\| \hat{\Pi}_{[p,q;L,K]}^* \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^q}}^2 \left\| (\hat{\mathfrak{g}}_{j;L,K}^{(p,q)})''' - \mathfrak{g}_{j;p,q} \right\|_{\mathcal{H}^q}^2 \right. \\
& \quad \left. + \left\| \hat{\Pi}_{[p,q;L,K]}^* - \prod_{[p,q]}^* \right\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^q}}^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O_{\mathbb{P}}(g_{M;\mathbf{p},\mathbf{q}}^{-2} K^{-\beta}) + O_{\mathbb{P}}(g_{M;\mathbf{p},\mathbf{q}}^{-3} M K^{-2\beta}) + O_{\mathbb{P}}(g_{M;\mathbf{p},\mathbf{q}}^{-2} K^{-\beta}) + O_{\mathbb{P}}(g_{M;\mathbf{p},\mathbf{q}}^{-4} K^{-2\beta}) \\
&= O_{\mathbb{P}}(g_{M;\mathbf{p},\mathbf{q}}^{-2} K^{-\beta}),
\end{aligned} \tag{4.153}$$

wobei im vorletzten Schritt $\|\hat{\Pi}_{[\mathbf{p},\mathbf{q};L,K]}^* - \Pi_{[\mathbf{p},\mathbf{q}]}^*\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^{\mathbf{q}}}}^2 = O(K^{-2\beta})$ und $\|\hat{\Pi}_{[\mathbf{p},\mathbf{q};L,K]}^*\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}^{\mathbf{q}}}} = O_{\mathbb{P}}(1)$ verwendet wurden (siehe Herleitung von (4.144)).

Term T_3 : Wegen $\Pi_{\mathcal{J}_{M;\mathbf{p},\mathbf{q}}^c} \beta_{[\mathbf{q}]} = \sum_{i,j>M} \langle \beta_{[\mathbf{q}]}, \phi_{ij;\mathbf{p},\mathbf{q}} \rangle_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathbf{q}},\mathcal{H}}} \phi_{ij;\mathbf{p},\mathbf{q}}$, $\phi_{ij;\mathbf{p},\mathbf{q}}(\mathbf{g}_{k;\mathbf{p},\mathbf{q}}) = \delta_{ik} \mathbf{g}_{j;\mathbf{p},\mathbf{q}}$ für alle i, j, k und wegen $\Pi_{[\mathbf{p},\mathbf{q}]}^{\dagger} \Pi_{\mathbf{g}_{1;\mathbf{p},\mathbf{q}}}^{\mathbf{g}_{M;\mathbf{p},\mathbf{q}}} = \mathbf{1}_{\mathbb{N}_{\leq M}}(j) \frac{g_{j;\mathbf{p},\mathbf{q}}}{g_{j;\mathbf{p},\mathbf{q}} + \theta_N} \mathbf{g}_{j;\mathbf{p},\mathbf{q}}$ für alle j, M gilt analog zu den Umformungen bei Term T_3 in Satz 4.37 für alle M :

$$\left\| \prod_{\mathcal{J}_{M;\mathbf{p},\mathbf{q}}^c} \beta_{[\mathbf{q}]} \prod_{[\mathbf{p},\mathbf{q}]}^{\dagger} \prod_{\mathbf{g}_{1;\mathbf{p},\mathbf{q}}}^{\mathbf{g}_{M;\mathbf{p},\mathbf{q}}} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathbf{q}},\mathcal{H}}}^2 = \sum_{j=1}^M \mathbf{1}_{\mathbb{N}_{>M}}(j) \left[\frac{g_{j;\mathbf{p},\mathbf{q}}}{g_{j;\mathbf{p},\mathbf{q}} + \theta_N} \right]^2 \left\| \sum_{i>M} \langle \beta_{[\mathbf{q}]}(\mathbf{g}_{j;\mathbf{p},\mathbf{q}}), \mathbf{c}_i \rangle_{\mathcal{H}} \mathbf{c}_i \right\|_{\mathcal{H}}^2 = 0. \tag{4.154}$$

Term T_4 : Wie bei der Herleitung der Rate von T_4 in Satz 4.51 gilt:

$$\left\| \prod_{\mathcal{J}_{M;\mathbf{p},\mathbf{q}}} \beta_{[\mathbf{q}]} \left[\prod_{[\mathbf{p},\mathbf{q}]}^{\dagger} \prod_{\mathbf{g}_{1;\mathbf{p},\mathbf{q}}}^{\mathbf{g}_{M;\mathbf{p},\mathbf{q}}} - \mathbb{I}_{\mathcal{H}^{\mathbf{q}}} \right] \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathbf{q}},\mathcal{H}}}^2 \leq \theta_N^2 g_{M;\mathbf{p},\mathbf{q}}^{-2} \|\beta_{[\mathbf{q}]\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathbf{q}},\mathcal{H}}}^2 \asymp \theta_N^2 g_{M;\mathbf{p},\mathbf{q}}^{-2}. \tag{4.155}$$

Setzen wir nun die Raten (4.152) bis (4.155) der Terme T_1 bis T_4 in (4.151) ein, führt dies wegen $\theta_N = O(K^{-\beta/2})$ und $g_{M;1}^{-1} M^{\beta} = O(K^{\beta})$ zu

$$\begin{aligned}
\left\| \hat{\beta}_{[\mathbf{q};L,K,M]} - \beta_{[\mathbf{q}]} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathbf{q}},\mathcal{H}}}^2 &= O_{\mathbb{P}}(g_{M;\mathbf{p},\mathbf{q}}^{-1} K^{-2\beta}) + O_{\mathbb{P}}(g_{M;\mathbf{p},\mathbf{q}}^{-2} K^{-\beta}) + \theta_N^2 g_{M;\mathbf{p},\mathbf{q}}^{-2} + O(M^{-2\beta}) \\
&= O_{\mathbb{P}}(M^{-2\beta}),
\end{aligned}$$

woraus, wie behauptet, (4.149) für alle $j = 1, \dots, \mathbf{q}$ folgt.

Es bleibt schließlich noch (4.150) für jedes $i = 2, \dots, \mathbf{p}$ nachzuweisen. Dies ist in der Tat gültig, da per Definition der Schätzer $\hat{\alpha}_{i;L,K,M}$ aus (4.142), wegen (4.137), (4.100) sowie (4.149) für $j = 1, \dots, \mathbf{q}$ und $g_{M;1}^{-1} M^{\beta} = O(K^{\beta})$ für jedes $i = 2, \dots, \mathbf{p}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|\hat{\alpha}_{i;L,K,M} - \alpha_i\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 &\lesssim \|\hat{\pi}_{L,K}^{(i)} - \pi_i\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 + \sum_{j=1}^{\min(i-1,\mathbf{q})} \left\| \hat{\beta}_{[\mathbf{q};L,K,M]}^{(j)} \hat{\pi}_{L,K}^{(i-j)} - \beta_j \pi_{i-j} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \\
&\lesssim O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta}) + \sum_{j=1}^{\min(i-1,\mathbf{q})} \left(\|\hat{\beta}_{[\mathbf{q};L,K,M]}^{(j)}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \|\hat{\pi}_{L,K}^{(i-j)} - \pi_{i-j}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \right. \\
&\quad \left. + \|\hat{\beta}_{[\mathbf{q};L,K,M]}^{(j)} - \beta_j\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \|\pi_{i-j}\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 \right) \\
&= O_{\mathbb{P}}(M^{-2\beta}). \quad \square
\end{aligned}$$

Bemerkung 4.56. Auf eine explizite Angabe möglicher Raten in Satz 4.55 verzichten wir, da sowohl die vorausgesetzten Raten für die in den Voraussetzungen genannten Folgen als auch die Raten im Endresultat in Satz 4.55 mit denen von Satz 4.51 übereinstimmen, wofür bereits das Beispiel 4.52 angegebenen wurde. \blacklozenge

5 Simulation

In diesem Kapitel simulieren wir Realisationen von Innovationen und \mathcal{H} -wertigen FARCH- und FGARCH-Zeitreihen (in Abschnitt 5.1 eine FARCH(1)-, in 5.2 eine FARCH(2)-, in 5.3 ein FGARCH(1, 1)- und in 5.4 eine FGARCH(2, 1)-Zeitreihe). Um den Zusammenhang der Simulationen dieser Zeitreihen zu verdeutlichen, werden wir im gesamten Kapitel von

$$\delta = \frac{1}{100} \cdot \mathbb{1}$$

ausgehen (wie bei der Simulation in [3], S.10), und für die Operatoren in den FARCH- und FGARCH-Zeitreihen ausschließlich die Integraloperatoren mit den folgenden Kernen für alle $s, t \in (0, 1)$ verwenden:

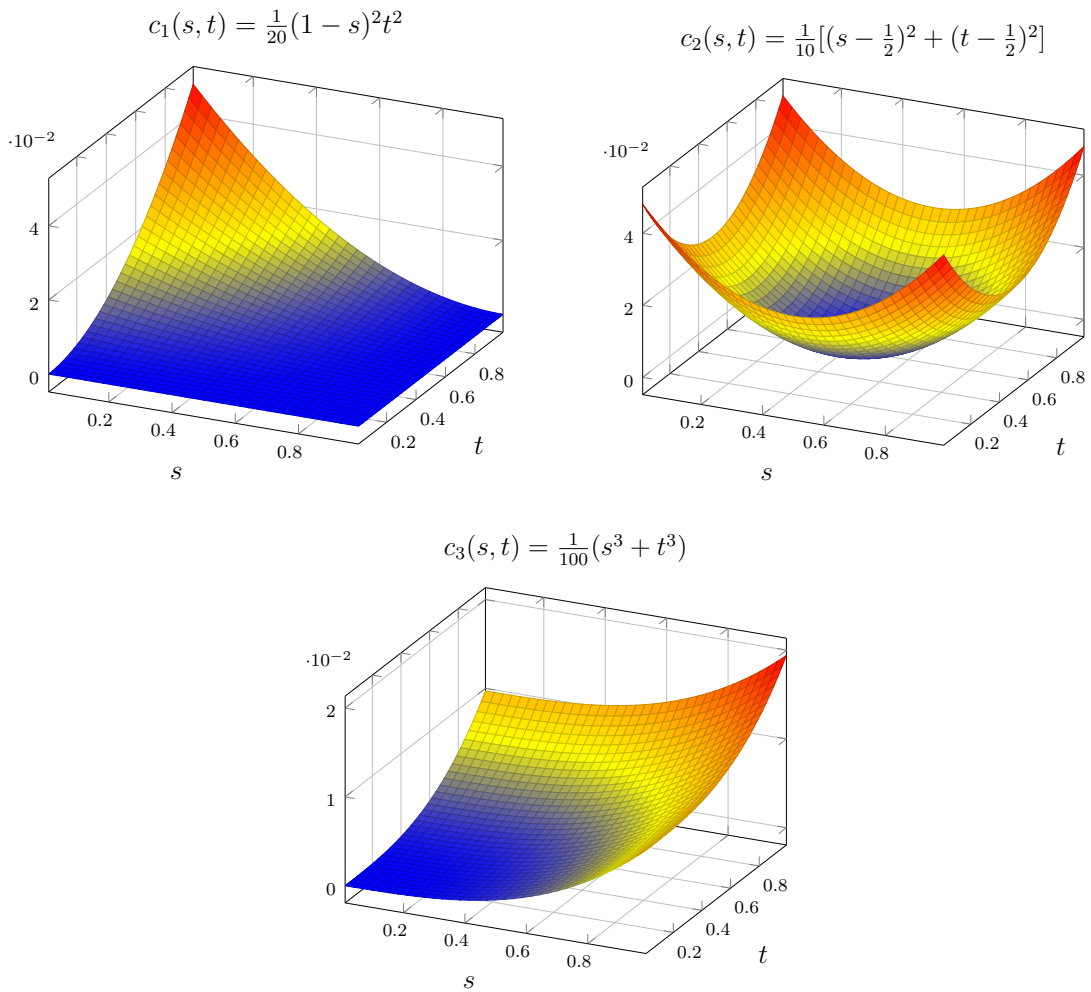


Abbildung 5.1: Die Kerne c_1, c_2 bzw. c_3 der Integraloperatoren C_1, C_2 bzw. C_3 .

Die Operatoren C_1, C_2 und C_3 mit den nichtnegativen, beschränkten Integralkernen c_1, c_2 und c_3 sind Elemente von $\mathcal{L}_{\mathcal{H}, L^4[0,1]}$ und bilden von $\mathcal{H}_{\geq 0}$ nach $\mathcal{H}_{\geq 0}$ ab. Dabei gilt nach der Cauchy-Schwarz'schen und der Jensen'schen Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|C_1\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}, L^4[0,1]}}^4 &= \sup_{\|h\|_{\mathcal{H}} \leq 1} \int_0^1 \left(\int_0^1 c_1(s, t) h(s) ds \right)^4 dt \\ &\leq \sup_{\|h\|_{\mathcal{H}} \leq 1} \int_0^1 \left(\int_0^1 c_1^2(s, t) ds \right)^2 dt \|h\|_{\mathcal{H}}^4 \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 c_1^4(s, t) ds dt \approx 7,716 \cdot 10^{-8}; \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\|C_2\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}, L^4[0,1]}}^4 \leq \int_0^1 \int_0^1 c_2^4(s, t) ds dt \approx 3,294 \cdot 10^{-7}; \quad (5.2)$$

$$\|C_3\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}, L^4[0,1]}}^4 \leq \int_0^1 \int_0^1 c_3^4(s, t) ds dt \approx 4,763 \cdot 10^{-9}. \quad (5.3)$$

Außerdem gehen wir im gesamten Kapitel von den Innovationen

$$\varepsilon_k(t) := \frac{Z_k + B_k(t)}{\sqrt{1+t}} \quad (5.4)$$

f.s. für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $t \in [0, 1]$ aus, wobei $Z_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$ für alle k gilt, $B_k = (B_k(t))_{t \in [0,1]}$ Brown'sche Bewegungen (siehe [27], Kapitel 21) für alle k sind und die Zufallsvariablen $\dots, Z_{-1}, B_{-1}, Z_0, B_0, Z_1, B_1, \dots$ stochastisch unabhängig sind.

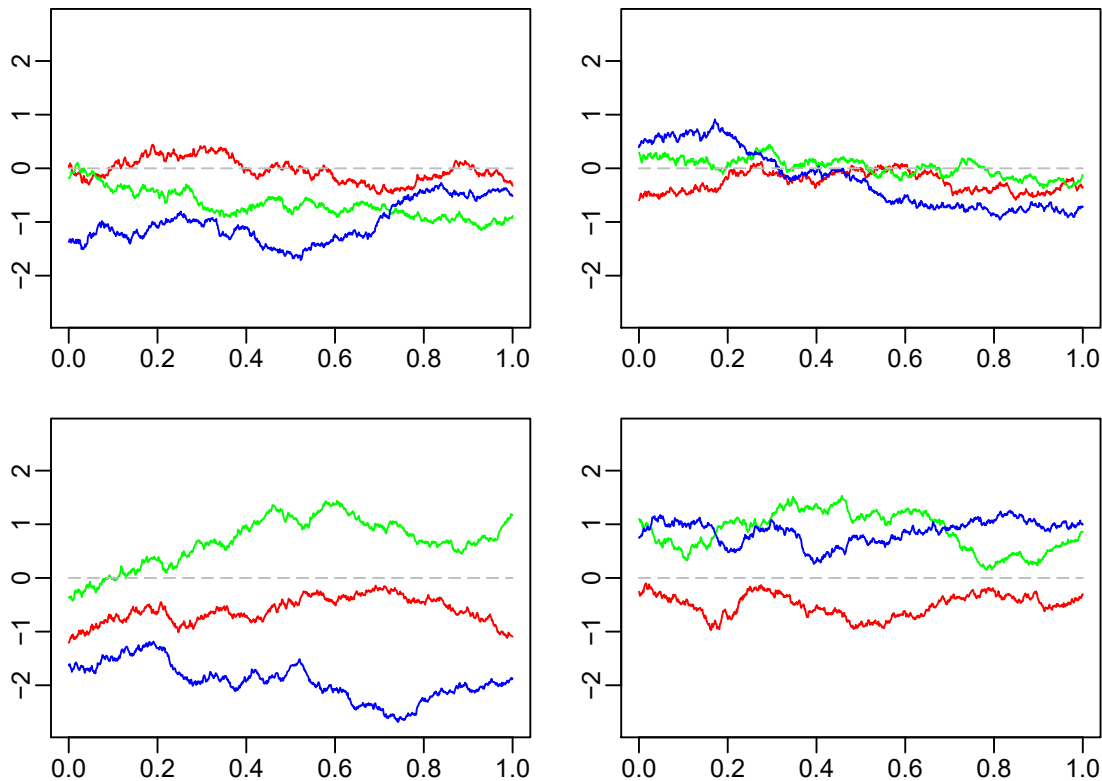


Abbildung 5.2: Je drei simulierte Realisationen von ε_1 (links oben), ε_2 (rechts oben), ε_3 (links unten) und ε_4 (rechts unten) aus (5.4) für die Schrittweite $\frac{1}{1000}$.

Des Weiteren handelt es sich bei $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit ε_k aus (5.4) für alle k um eine u.i.v., zentrierte Zeitreihe mit $\varepsilon_0(t) \sim \mathcal{N}(0, 1)$ für alle t . Folglich gilt sowohl $\mathbb{E}(\varepsilon_0^2(t)) = 1$ als auch $\mathbb{E}(\varepsilon_0^8(t)) = 105$ für alle t . Ferner gilt nach dem Satz von Fubini

$$\mathbb{E} \|\varepsilon_0^2\|_{L^4[0,1]}^4 = \int \mathbb{E}(\varepsilon_0^8(t)) dt = 105. \quad (5.5)$$

Von der Größe in (5.5) werden wir beim Nachweis von (3.13) für ein $n \in \mathbb{N}$ und $\nu = 2$ in den Abschnitten 5.1 bis 5.4 Gebrauch machen. Dies ist die einzige noch zu beweisende Voraussetzung für Satz 3.3, wobei dieser Satz sicherstellt, dass es eine stationäre Lösung der FARCH- und FGARCH-Zeitreihen in den Abschnitten 5.1 bis 5.4 gibt.

Für die Simulation der Realisationen der FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)-Zeitreihen mit $\mathbf{p} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q}^* \in \mathbb{N}^*$ werden wir im gesamten Kapitel von Korollar 3.5 den Startwert $\tilde{\zeta}_0^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} = 0_{\mathcal{H}^{\mathbf{s}^*}}$ verwenden. Dabei gilt aufgrund von $\tilde{\zeta}_N^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} := \delta_N^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} + \Psi_N^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)}(\tilde{\zeta}_{N-1}^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)})$ für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\tilde{\zeta}_N^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} = \delta_N^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} + \sum_{k=1}^{N-1} \Psi_N^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} \Psi_{N-1}^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} \dots \Psi_{k+1}^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)}(\delta_k^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)}), \quad (5.6)$$

wobei die in $\delta_k^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)}$ enthaltene Innovation ε_k für alle $k = 1, \dots, N$ in der Simulation als unabhängig von den eben dargestellten Innovationen $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$ angesehen werden. Gemäß Korollar 3.5 und aufgrund von Stationarität der Folgen $(\tilde{\zeta}_N^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)})_N$ für alle \mathbf{p}, \mathbf{q}^* nach dem Beweis von Satz 3.3, interpretieren wir die Komponenten von $\tilde{\zeta}_{100}^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)}$ als Realisationen der Komponenten $\mathcal{X}_0^2, \dots, \mathcal{X}_{1-\mathbf{p}}^2, \sigma_0^2, \dots, \sigma_{1-\mathbf{q}^*}^2$ von $\zeta_0^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)}$. Des Weiteren erhalten wir durch Einsetzen der Realisationen von $\mathcal{X}_0^2, \dots, \mathcal{X}_{1-\mathbf{p}}^2, \sigma_0^2, \dots, \sigma_{1-\mathbf{q}^*}^2$ in die beiden FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)-Gleichungen mit den bereits simulierten Realisationen $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$ aus der Abbildung 5.2 wiederum Werte, die wir als Realisationen von $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_4$ der FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)-Zeitreihe deuten. Diese Werte stimmen wegen $\delta = \frac{1}{100} \cdot \mathbb{1}$, wegen der beiden FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)-Gleichungen und, da die Integraloperatoren C_1, C_2 und C_3 verhältnismäßig kleine Kerne haben, nahezu mit den mit dem Faktor $\frac{1}{10}$ skalierten, simulierten Realisationen von $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$ überein. Aus diesem Grund werden wir im gesamten Kapitel die Differenzen

$$\Delta_k^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)}(t) := \mathcal{X}_k(t) - \frac{1}{10} \varepsilon_k(t) = \varepsilon_k(t) \left(\sigma_k(t) - \frac{1}{10} \right) \quad (5.7)$$

mit $k = 1, \dots, 4$ und $t \in [0, 1]$ illustrieren.

5.1 Eine FARCH(1)-Zeitreihe

In diesem Abschnitt gilt

$$\alpha_1 = C_1.$$

Nach Definition von $\Psi_1^{(1,0)}$ aus (3.5), wegen (3.7), (5.1), (5.5) und wegen der Jensen'schen Ungleichung gilt

$$\psi_{1,2}^{(1,0)} := \mathbb{E} \|\Psi_1^{(1,0)}\|_{\mathcal{L}^{\mathcal{H}}}^2 \leq \|\alpha_1\|_{\mathcal{L}^{\mathcal{H}, L^4[0,1]}}^2 \sqrt{\mathbb{E} \|\varepsilon_1^2\|_{L^4[0,1]}^4} \approx 2,846 \cdot 10^{-3} < 1.$$

womit eine stationäre FARCH(1)-Zeitreihe $(\mathcal{X}_k)_k$ mit $\delta = \frac{1}{100} \cdot \mathbb{1}$ und $\alpha_1 = C_1$ existiert. Für eine solche Zeitreihe stellen wir die Simulation einer Realisation von $\tilde{\zeta}_{100}^{(1,0)}$ aus (5.6) dar, die wir als Realisation von \mathcal{X}_0^2 interpretieren.

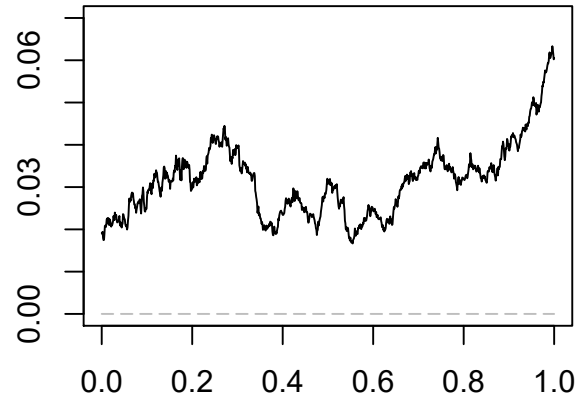


Abbildung 5.3: Simulation einer Realisation von \mathcal{X}_0^2 der FARCH(1)-Zeitreihe mit $\delta = \frac{1}{100} \cdot \mathbf{1}$ und $\alpha_1 = C_1$ für die Schrittweite $\frac{1}{1000}$.

Ausgehend von dieser und den je drei simulierten Realisationen von $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$ in Abbildung 5.2 können wir je drei simulierte Realisationen von $\Delta_1^{(1,0)}, \dots, \Delta_4^{(1,0)}$ aus (5.7) darstellen.

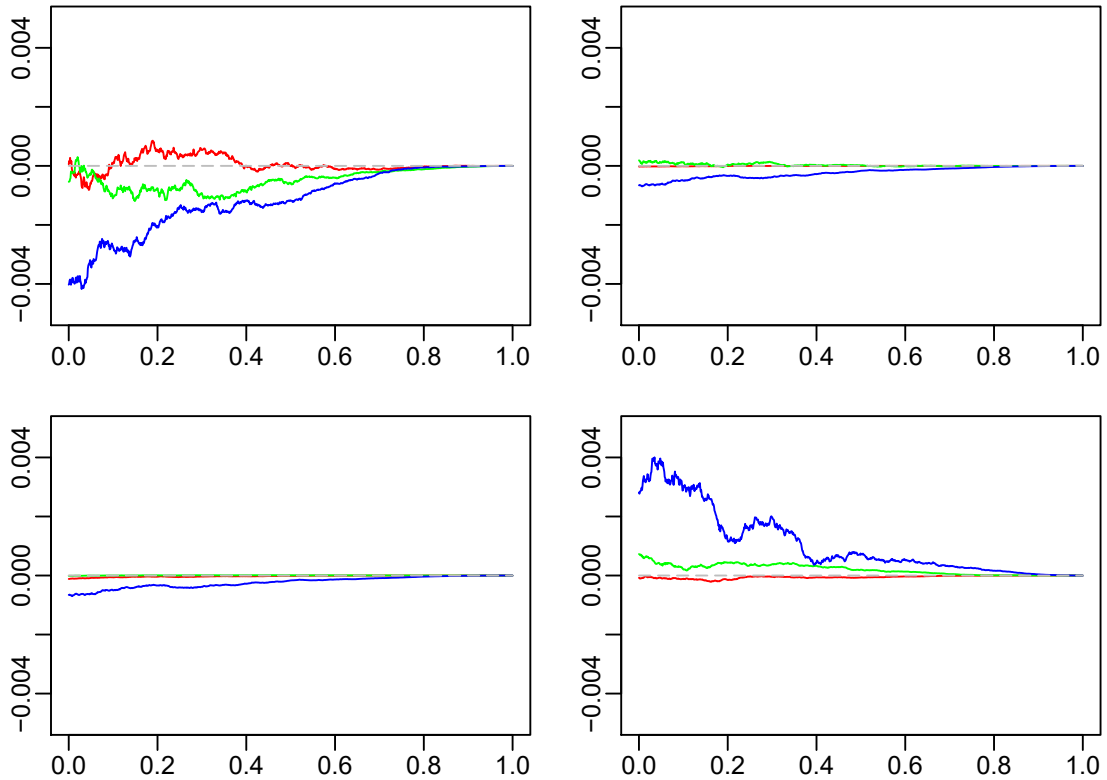


Abbildung 5.4: Je drei simulierte Realisationen von $\Delta_1^{(1,0)}$ (links oben), $\Delta_2^{(1,0)}$ (rechts oben), $\Delta_3^{(1,0)}$ (links unten) und $\Delta_4^{(1,0)}$ (rechts unten) aus (5.7) der FARCH(1)-Zeitreihe mit $\delta = \frac{1}{100} \cdot \mathbf{1}$ und $\alpha_1 = C_1$ für die Schrittweite $\frac{1}{1000}$.

5.2 Eine FARCH(2)-Zeitreihe

In diesem Abschnitt gilt

$$\alpha_1 = C_1 \quad \text{und} \quad \alpha_2 = C_2.$$

Dabei gilt aufgrund von

$$\Psi_2^{(2,0)} \Psi_1^{(2,0)} = \begin{bmatrix} \square_2 \alpha_1 & \square_2 \alpha_2 \\ \mathbb{I}_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square_1 \alpha_1 & \square_1 \alpha_2 \\ \mathbb{I}_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square_2 \alpha_1 \square_1 \alpha_1 + \square_2 \alpha_2 & \square_2 \alpha_1 \square_1 \alpha_2 \\ \square_1 \alpha_1 & \square_1 \alpha_2 \end{bmatrix}$$

und wegen (2.27), (3.7), (5.1), (5.2), (5.5) sowie weil \square_1 und \square_2 u.i.v. sind:

$$\begin{aligned} \psi_{2,2}^{(2,0)} &:= \mathbb{E} \|\Psi_2^{(2,0)} \Psi_1^{(2,0)}\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}^2}^2 \\ &\leq \mathbb{E} \|\square_2 \alpha_1 \square_1 \alpha_1 + \square_2 \alpha_2\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}}^2 + \mathbb{E} \|\square_2 \alpha_1 \square_1 \alpha_2\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}}^2 + \mathbb{E} \|\square_1 \alpha_1\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}}^4 + \mathbb{E} \|\square_1 \alpha_2\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}}^4 \\ &\leq \sqrt{105} \left(2 \left[\sqrt{105} \|\alpha_1\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^4 + \|\alpha_2\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^2 \right] + \sqrt{105} \|\alpha_1\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^2 \|\alpha_2\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\alpha_1\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^2 + \|\alpha_2\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^2 \right) \\ &\approx \sqrt{105} \left(2 \cdot 5,747 \cdot 10^{-4} + \sqrt{105} \cdot 1,594 \cdot 10^{-7} + 2,778 \cdot 10^{-4} + 5,739 \cdot 10^{-4} \right) \\ &\approx 2,052 \cdot 10^{-2} < 1. \end{aligned}$$

Demnach existiert eine stationäre Lösung der FARCH(2)-Zeitreihe mit den Parametern $\delta = \frac{1}{100} \cdot \mathbf{1}$, $\alpha_1 = C_1$ und $\alpha_2 = C_2$. Für diese FARCH(2)-Zeitreihe simulieren und skizzieren wir nun Realisationen der beiden Komponenten $\xi_{100}^{(2,0)}$ aus (5.6).

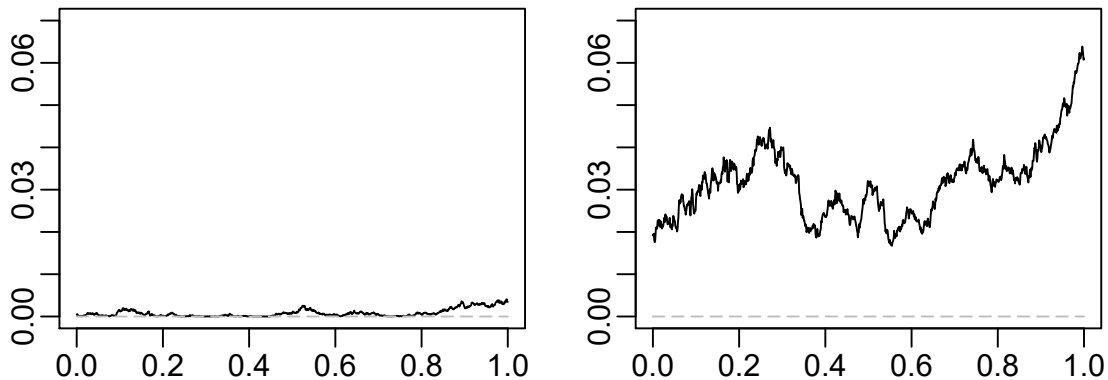


Abbildung 5.5: Simulierte Realisationen von \mathcal{X}_{-1}^2 (links) und \mathcal{X}_0^2 (rechts) der FARCH(2)-Zeitreihe mit $\delta = \frac{1}{100} \cdot \mathbf{1}$, $\alpha_1 = C_1$ und $\alpha_2 = C_2$ für die Schrittweite $\frac{1}{1000}$.

Mit Hilfe dieser simulierten Realisationen von \mathcal{X}_0^2 sowie \mathcal{X}_{-1}^2 und der je drei simulierten Realisationen von $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$ in Abbildung 5.2 lassen sich auch je drei simulierten Realisationen der Differenzen $\Delta_1^{(2,0)}, \dots, \Delta_4^{(2,0)}$ aus (5.7) angeben.

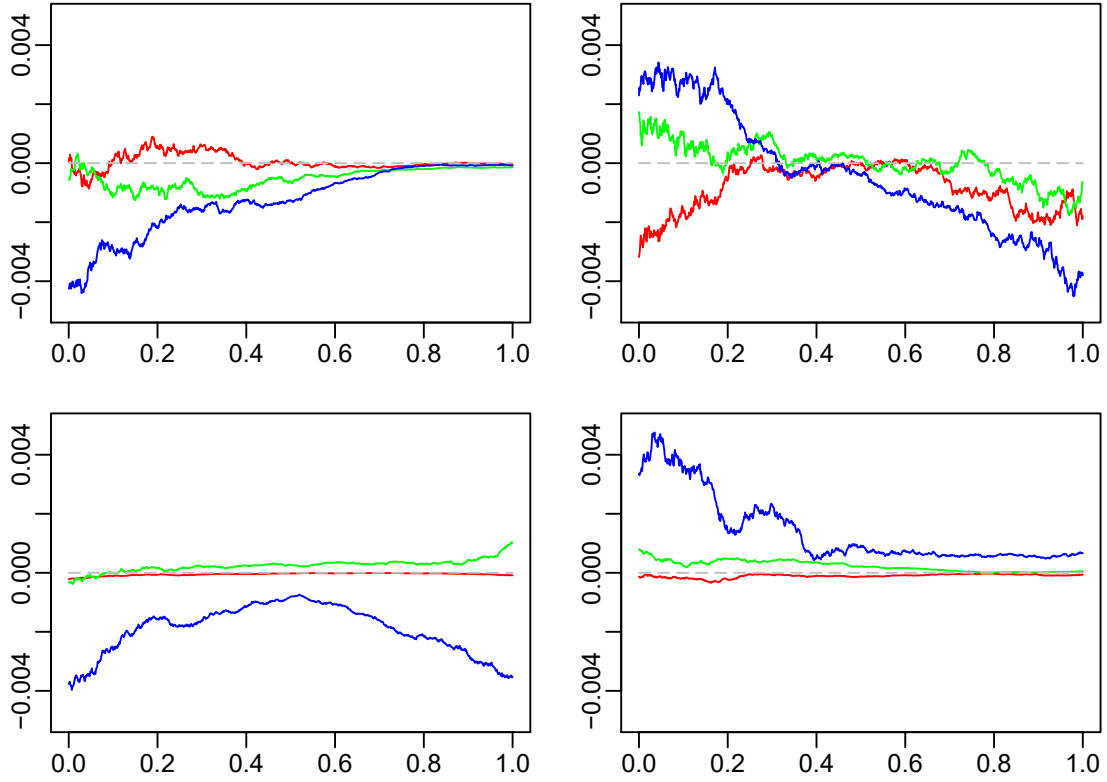


Abbildung 5.6: Je drei simulierte Realisationen von $\Delta_1^{(2,0)}$ (links oben), $\Delta_2^{(2,0)}$ (rechts oben), $\Delta_3^{(2,0)}$ (links unten) und $\Delta_4^{(3,0)}$ (rechts unten) aus (5.7) der FARCH(2)-Zeitreihe mit $\delta = \frac{1}{100} \cdot \mathbf{1}$, $\alpha_1 = C_1$ und $\alpha_2 = C_2$ für die Schrittweite $\frac{1}{1000}$.

5.3 Eine FGARCH(1,1)-Zeitreihe

In diesem Abschnitt betrachten wir eine FGARCH(1,1)-Zeitreihe mit den Operatoren

$$\alpha_1 = C_1 \quad \text{und} \quad \beta_1 = C_2.$$

Dabei gilt aufgrund von

$$\Psi_2^{(1,1)} \Psi_1^{(1,1)} = \begin{bmatrix} \square_2 \alpha_1 & \square_2 \beta_1 \\ \mathbb{I}_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square_1 \alpha_1 & \square_1 \beta_1 \\ \mathbb{I}_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square_2 \alpha_1 \square_1 \alpha_1 + \square_2 \beta_1 & \square_2 \alpha_1 \square_1 \beta_1 \\ \square_1 \alpha_1 & \square_1 \beta_1 \end{bmatrix}$$

analog zum vorherigen Abschnitt $\psi_{2,2}^{(1,1)} := \mathbb{E} \|\Psi_2^{(1,1)} \Psi_1^{(1,1)}\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}^2}^2 < 1$, womit eine stationäre Lösung der FGARCH(1,1)-Zeitreihe mit $\delta = \frac{1}{100} \cdot \mathbf{1}$, $\alpha_1 = C_1$ und $\beta_1 = C_1$ existiert. Die Komponenten einer simulierten Realisation von $\tilde{\varsigma}_{100}^{(1,1)}$, die wir als simulierte Realisationen \mathcal{X}_0^2 und σ_0^2 von $\varsigma_0^{(1,1)}$ interpretieren, haben die folgende Gestalt.

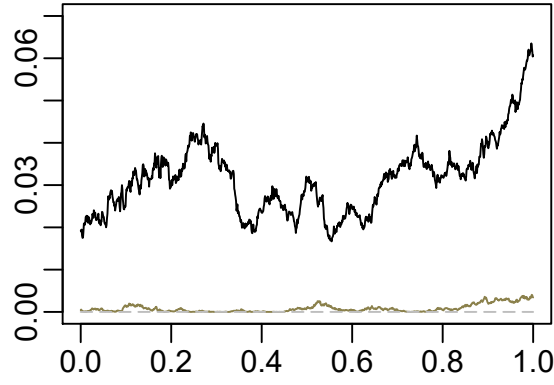


Abbildung 5.7: Simulierte Realisationen von \mathcal{X}_0^2 (schwarz) und σ_0^2 (gold) der FGARCH(1,1)-Zeitreihe mit $\delta = \frac{1}{100} \cdot \mathbb{1}$, $\alpha_1 = C_1$ und $\beta_1 = C_2$ für die Schrittweite $\frac{1}{1000}$.

Diese simulierten Realisationen von \mathcal{X}_0^2 sowie σ_0^2 und die je drei simulierten Realisationen von $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$ in Abbildung 5.2 verwenden wir nun für die Darstellung von drei simulierten Realisationen der Differenzen $\Delta_1^{(1,1)}, \dots, \Delta_4^{(1,1)}$ aus (5.7).

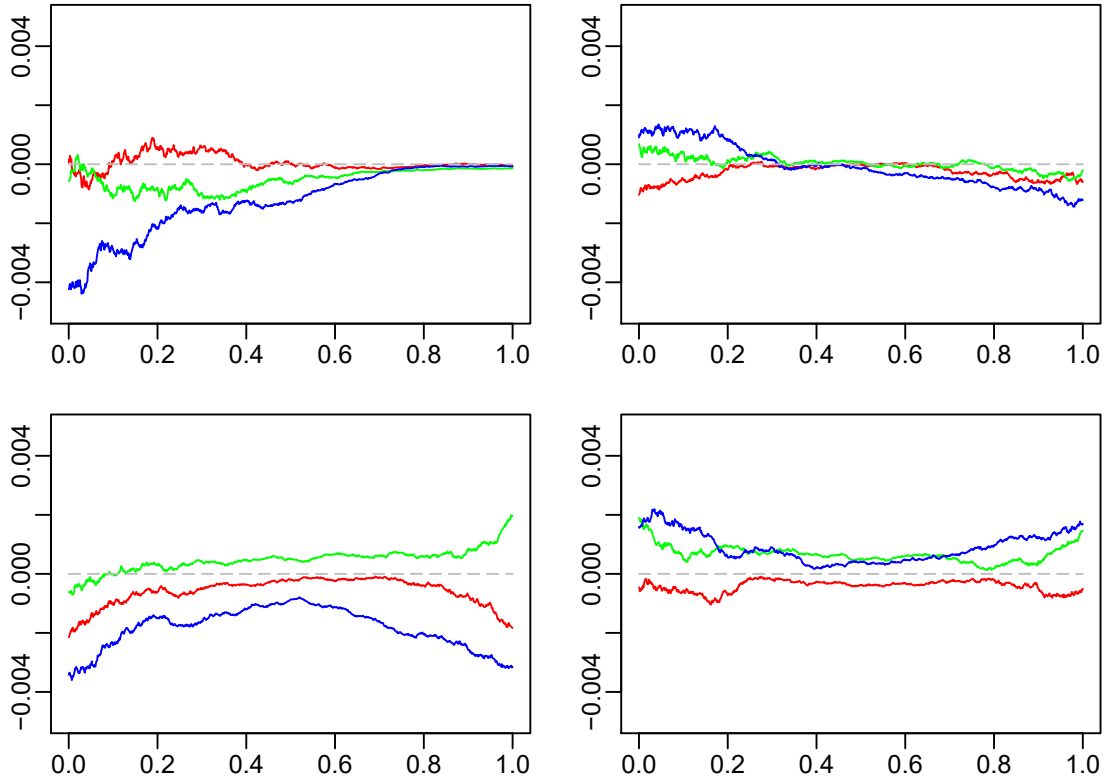


Abbildung 5.8: Je drei simulierten Realisationen von $\Delta_1^{(1,1)}$ (links oben), $\Delta_2^{(1,1)}$ (rechts oben), $\Delta_3^{(1,1)}$ (links unten) und $\Delta_4^{(1,1)}$ (rechts unten) aus (5.7) der FGARCH(1,1)-Zeitreihe mit $\delta = \frac{1}{100} \cdot \mathbb{1}$, $\alpha_1 = C_1$ und $\beta_1 = C_2$ für die Schrittweite $\frac{1}{1000}$.

5.4 Eine FARCH(2,1)-Zeitreihe

In diesem Abschnitt gehen wir von den folgenden Operatoren aus:

$$\alpha_1 = C_1, \quad \alpha_2 = C_2, \quad \beta_1 = C_3.$$

Zunächst gilt:

$$\begin{aligned} & \Psi_3^{(2,1)} \Psi_2^{(2,1)} \Psi_1^{(2,1)} \\ &= \begin{bmatrix} \square_3 \alpha_1 & \square_3 \alpha_2 & \square_3 \beta_1 \\ \mathbb{I}_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} & \mathbb{I}_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square_2 \alpha_1 & \square_2 \alpha_2 & \square_2 \beta_1 \\ \mathbb{I}_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} & \mathbb{I}_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square_1 \alpha_1 & \square_1 \alpha_2 & \square_1 \beta_1 \\ \mathbb{I}_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} & \mathbb{I}_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{L}\mathcal{H}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \square_3 \alpha_1 \square_2 \alpha_1 \square_1 \alpha_1 + \square_3 \alpha_1 \square_2 \alpha_2 & \square_3 \alpha_1 \square_2 \alpha_1 \square_1 \alpha_1 + \square_3 \alpha_2 \square_2 \beta_1 & \square_3 \alpha_1 \square_2 \beta_1 \square_1 \beta_1 \\ + \square_3 \alpha_2 \square_1 \alpha_1 + \square_3 \beta_1 & + \square_3 \alpha_2 \square_1 \alpha_2 & + \square_3 \alpha_2 \square_1 \beta_1 \\ \square_2 \alpha_1 \square_1 \alpha_1 + \square_2 \alpha_2 & \square_2 \alpha_1 \square_1 \alpha_2 + \square_2 \beta_1 & \square_2 \beta_1 \square_1 \beta_1 \\ \square_1 \alpha_1 & \square_1 \alpha_2 & \square_1 \beta_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

und nach der Argumentation in Abschnitt 5.1 mit (5.1) bis (5.5) gilt dann:

$$\begin{aligned} \psi_{3,2}^{(2,1)} &:= \mathbb{E} \|\Psi_3^{(2,1)} \Psi_2^{(2,1)} \Psi_1^{(2,1)}\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}^3}^2 \\ &\leq \sqrt{105} \left(4 \left[105 \|\alpha_1\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^6 + 2\sqrt{105} \|\alpha_1\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^2 \|\alpha_2\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^2 + \|\beta_1\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^2 \right] \right. \\ &\quad + 3\sqrt{105} \left[\sqrt{105} \|\alpha_1\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^6 + \|\alpha_2\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^2 \|\beta_1\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^2 + \|\alpha_2\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^2 \right] \\ &\quad + 2\sqrt{105} \left[\sqrt{105} \|\alpha_1\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^2 \|\beta_1\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^4 + \|\alpha_2\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^2 \|\beta_1\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^2 \right] \\ &\quad + 2 \left[\sqrt{105} \|\alpha_1\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^4 + \|\alpha_2\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^2 \right] \\ &\quad + 2 \left[\sqrt{105} \|\alpha_1\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^2 \|\alpha_2\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^2 + \|\beta_1\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^2 \right] \\ &\quad \left. + \|\beta_1\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^4 + \|\alpha_1\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^2 + \|\alpha_2\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^2 + \|\beta_1\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}, L^4[0,1]}^2 \right) \\ &\approx \sqrt{105} \left(4 \cdot 7,228 \cdot 10^{-5} + 3\sqrt{105} \cdot 5,739 \cdot 10^{-4} + 2\sqrt{105} \cdot 3,962 \cdot 10^{-8} \right. \\ &\quad + 2 \cdot 5,747 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 7,064 \cdot 10^{-5} + 4,736 \cdot 10^{-9} + 2,778 \cdot 10^{-4} \\ &\quad \left. + 5,739 \cdot 10^{-4} + 6,901 \cdot 10^{-5} \right) \\ &\approx 0,206 < 1. \end{aligned}$$

Demnach existiert auch eine stationäre FGARCH(2, 1)-Zeitreihe mit den Parametern $\delta = \frac{1}{100} \cdot \mathbf{1}, \alpha_1 = C_1, \alpha_2 = C_2$ und $\beta_1 = C_3$. Für diese FGARCH(2, 1)-Zeitreihe illustrieren wir nachfolgend die Komponenten einer simulierten Realisation von $\tilde{\varsigma}_{100}^{(2,1)}$, die wir als simulierte Realisationen $\mathcal{X}_0^2, \mathcal{X}_{-1}^2$ und σ_0^2 von $\varsigma_0^{(2,1)}$ interpretieren.

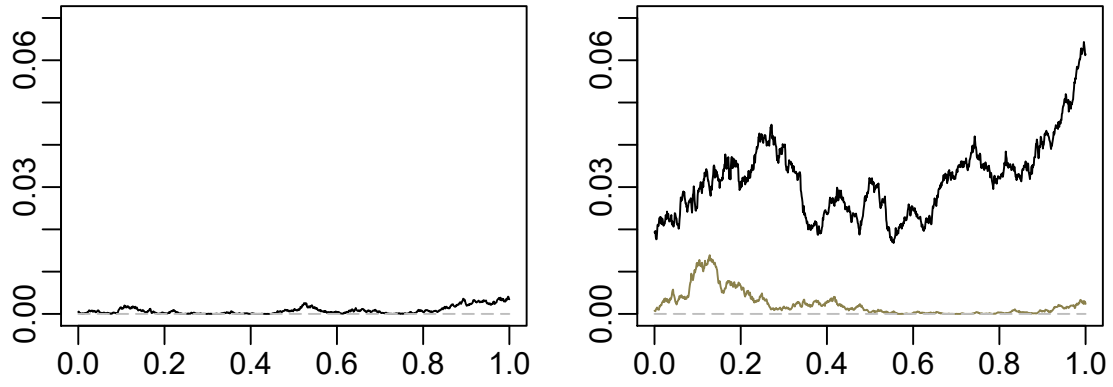


Abbildung 5.9: Simulierte Realisationen von \mathcal{X}_{-1}^2 (links), \mathcal{X}_0^2 (rechts, schwarz) und σ_0^2 (rechts, gold) der FGARCH(2,1)-Zeitreihe mit $\delta = \frac{1}{100} \cdot \mathbb{1}$, $\alpha_1 = C_1$, $\alpha_2 = C_2$ und $\beta_1 = C_3$ für die Schrittweite $\frac{1}{1000}$.

Die simulierten Realisationen von \mathcal{X}_0^2 , \mathcal{X}_{-1}^2 sowie σ_0^2 aus (5.9) und die je drei simulierten Realisationen von $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$ in Abbildung 5.2 nutzen wir nun für die Darstellung von drei simulierten Realisationen der Differenzen $\Delta_1^{(2,1)}, \dots, \Delta_4^{(2,1)}$ aus (5.7).

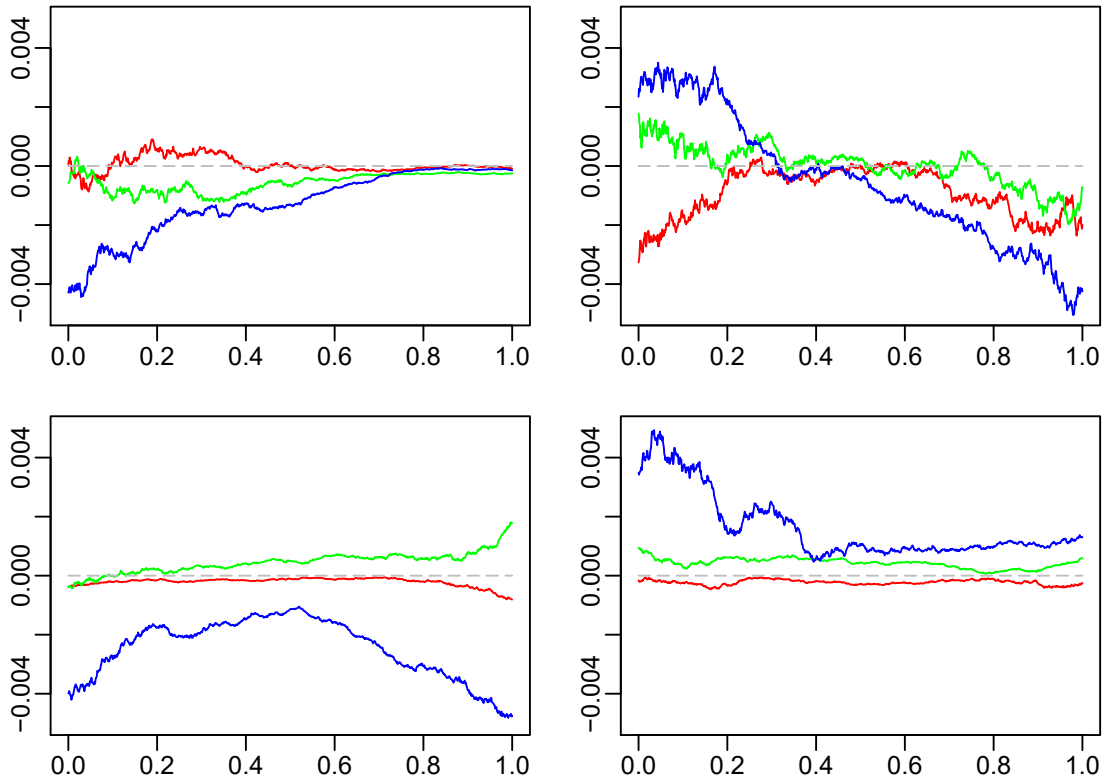


Abbildung 5.10: Je drei simulierte Realisationen von $\Delta_1^{(2,1)}$ (links oben), $\Delta_2^{(2,1)}$ (rechts oben), $\Delta_3^{(2,1)}$ (links unten) und $\Delta_4^{(2,1)}$ (rechts unten) aus (5.7) der FGARCH(2,1)-Zeitreihe mit $\delta = \frac{1}{100} \cdot \mathbb{1}$, $\alpha_1 = C_1$, $\alpha_2 = C_2$ und $\beta_1 = C_3$ für die Schrittweite $\frac{1}{1000}$.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

In dieser Dissertation analysieren wir ARCH- und GARCH-Zeitreihen $(\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit beliebigen Ordnungen und mit Werten in diversen Funktionenräumen über dem Intervall $[0, 1]$. Wir geben hinreichende Bedingungen für Stationarität dieser funktionalen ARCH- und GARCH-Zeitreihen an. Im Fokus steht dabei die Schätzung sowohl der Parameter von \mathcal{H} -wertigen FARCH(\mathbf{p})-Zeitreihen mit $\mathcal{H} := L^2[0, 1]$ und $\mathbf{p} \in \mathbb{N}$, d.h. von $\delta, \alpha_1, \dots, \alpha_{\mathbf{p}}$ in der rechten der FARCH(\mathbf{p})-Gleichungen

$$\mathcal{X}_k = \varepsilon_k \odot \sigma_k, \quad \sigma_k^2 = \delta + \sum_{i=1}^{\mathbf{p}} \alpha_i(\mathcal{X}_{k-i}^2)$$

mit $k \in \mathbb{Z}$, wobei $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ für eine \mathcal{H} -wertige Zeitreihe und \odot für das punktweise Produkt steht, als auch der Parameter von \mathcal{H} -wertigen FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihen mit $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}$, also von $\delta, \alpha_1, \dots, \alpha_{\mathbf{p}}, \beta_1, \dots, \beta_{\mathbf{q}}$ in der rechten der FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Gleichungen

$$\mathcal{X}_k = \varepsilon_k \odot \sigma_k, \quad \sigma_k^2 = \delta + \sum_{i=1}^{\mathbf{p}} \alpha_i(\mathcal{X}_{k-i}^2) + \sum_{j=1}^{\mathbf{q}} \beta_j(\sigma_{k-j}^2)$$

mit $k \in \mathbb{Z}$. Die Ergebnisse dieser Arbeit beruhen auf den Ergebnissen der uns bekannten Arbeiten zum FARCH- und FGARCH-Modell von Hörmann, Horváth und Reeder [22] aus dem Jahr 2013 zu $C[0, 1]$ - und \mathcal{H} -wertigen FARCH(1)-Zeitreihen, von Aue, Horváth und Pellatt [3] aus dem Jahr 2017 zu $C[0, 1]$ - und \mathcal{H} -wertigen FGARCH(1, 1)-Zeitreihen und von Cerovecki, Francq, Hörmann und Zakoïan [11] aus dem Jahr 2019 zu \mathcal{H} -wertigen FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihen mit $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}$.

In Definition 3.1 geben wir eine formale Definition sowohl der FARCH(\mathbf{p})- als auch der FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihen mit $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}$ für Werte in einem Funktionenraum $F \in \mathcal{F}$ mit \mathcal{F} in (3.1) an, d.h. mit Werten in $L^p[0, 1]$ -Räumen mit $p \in [1, \infty)$ und in Räumen mit Definitionsbereich $[0, 1]$, wobei diese Räume bzgl. $\|\cdot\|_{\infty}$ Banachräume und bzgl. \odot abgeschlossen sind. In Satz 3.3 geben wir zwei Bedingungen an und weisen nach, dass sie hinreichend für die Existenz stationärer Lösungen der FARCH(\mathbf{p})- und FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Gleichungen mit $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}$ für alle $F \in \mathcal{F}$ sind und dass diese Lösungen sogar f.s. eindeutig, bzgl. $(\varepsilon_k)_k$ kausal sowie ergodisch sind. Im Beweis von Satz 3.3 wird deutlich, dass die in Teil (a) genannte Bedingung für den Lyapunov-Exponenten

$$\gamma^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} < 0$$

schwächer ist als die Bedingung in Teil (b)

$$\psi_{n, \nu}^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} := \mathbb{E} \left\| \Psi_n^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} \Psi_{n-1}^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} \dots \Psi_1^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} \right\|_{\mathcal{L}_{F^{\mathbf{s}^*}}}^{\nu} < 1$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $\nu > 0$. Diese Bedingung ist zwar restriktiver als die Bedingung $\gamma^{(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)} < 0$, jedoch lässt sich mit ihr und mit etwas Rechenaufwand unmittelbar nachweisen, ob eine stationäre Lösung einer FARCH(\mathbf{p})- und einer FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihe mit $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}$ existiert (siehe Kapitel 5). Von der Bedingung aus Satz 3.3 (b) wird außerdem in Korollar 3.5 und in Lemma 3.6 Gebrauch gemacht. Insgesamt handelt es sich bei Satz 3.3 um eine Verallgemeinerung unter einer schwächeren Bedingung der Theoreme 2.1 und 2.3 in [22], 2.1 und 2.2 in [3] und Theorem 1 in [11]. In Korollar 3.5 stellt sich heraus, dass die Werte der FARCH(\mathbf{p})- und FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihen mit $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}$ bei Einsetzen eines beliebigen Startwertes und mehrfacher Anwendung der FARCH(\mathbf{p})- bzw. FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Gleichungen, mit einer geometrischen Abklingrate im Sinne von Konvergenz im p -ten Mittel für bestimmte $p > 0$ approximieren lassen. Von diesem Korollar wird bei der Simulation der Realisationen von FARCH(\mathbf{p})- und FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihen in Kapitel 5 Gebrauch gemacht. Ferner zeigen wir in Lemma 3.6, dass für jede FARCH(\mathbf{p})- bzw. FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihe $(\mathcal{X}_k)_k$ mit $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}$ und $F \in \mathcal{F}$ sowohl $\mathbb{E} \|\mathcal{X}_0^2\|_F^\nu$ als auch $\mathbb{E} \|\sigma_0^2\|_F^\nu$ mit \hat{F} aus (3.2) endlich, dass $(\mathcal{X}_k^2)_k$ geometrisch L_F^ν - m -approximierbar und dass $(\sigma_k^2)_k$ geometrisch L_F^ν - m -approximierbar ist (siehe Abschnitt 2.5.3). Dieses Lemma ist deshalb so bedeutsam, weil bei der Schätzung der Operatoren von \mathcal{H} -wertigen FARCH- und FGARCH-Zeitreihen $(\mathcal{X}_k)_k$ Satz 4.4 eingeht, in welchem die $L_{\mathcal{H}}^4$ - m -Approximierbarkeit von $(\mathcal{X}_k^2)_k$ verlangt wird.

In Satz 4.26 formulieren wir ein Konsistenzresultat im Sinne stochastischer Konvergenz der Schätzfehler des in (4.49) aufgestellten Schätzers $\hat{\delta}$ für den Parameter δ der \mathcal{H} -wertigen FARCH(\mathbf{p})- bzw. FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihe mit $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}$, in welches die Schätzfehler der Schätzer für die Operatoren der jeweiligen FARCH(\mathbf{p})- bzw. FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihe eingehen. Die asymptotische obere Schranke des Schätzfehlers des Schätzers $\hat{\delta}$ in (4.49) für δ stimmt für \mathcal{H} -wertige FARCH(1)-Zeitreihen mit dem Resultat in [22], Lemma 3.1, worauf die Beweisidee von Satz 4.26 beruht, überein. Bei der Schätzung der Operatoren der FARCH- und FGARCH-Zeitreihen verwenden wir stets bestimmte Yule-Walker-Gleichungen und Tichonow-Regularisierte. In Satz 4.28 beweisen wir, dass unter bestimmten Voraussetzungen für den Schätzer $\hat{\alpha}_1$ in (4.54) für $\prod_{\mathcal{J}_K} \alpha_1$, wobei $\prod_{\mathcal{J}_K}$ der Projektionsoperator auf einen bestimmten Unterraum \mathcal{J}_K des Hilbert-Raums $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ der Hilbert-Schmidt-Operatoren von \mathcal{H} nach \mathcal{H} und $\alpha_1 \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ für den Operator einer \mathcal{H} -wertigen FARCH(1)-Zeitreihe steht, für jedes feste $K \in \mathbb{N}$

$$\left\| \hat{\alpha}_1 - \prod_{\mathcal{J}_K} \alpha_1 \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(N^{-1})$$

gilt. Diese Rate stimmt mit der Rate in [22], Theorem 3.1 überein. Die Argumente im Beweis von Satz 4.28 können wir allerdings für die Schätzung von α_1 , ohne α_1 auf einen endlichdimensionalen Unterraum zu projizieren, für die Schätzung der Operatoren im FARCH(\mathbf{p})-Modell mit $\mathbf{p} > 1$ sowie für die Schätzung der Operatoren im FGARCH-Modell nutzen. Ein Kernresultat dieser Dissertation ist Satz 4.30, in welchem wir auf Grundlage von Satz 4.28 verifizieren, dass für den Schätzer $\hat{\alpha}_1$ in (4.54) für den Operator $\alpha_1 \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ einer \mathcal{H} -wertigen FARCH(1)-Zeitreihe mit einer geeigneten Folge $(K_N)_N$ mit $K = K_N \rightarrow \infty$ unter Annahme 4.24 für $\beta > 0$

$$\left\| \hat{\alpha}_1 - \alpha_1 \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta})$$

gilt. Dieses Resultat ist neuartig (siehe [3], [11] und [22]). Satz 4.37 entspricht den Sätzen 4.28 und 4.30 für \mathcal{H} -wertige FARCH(\mathbf{p})-Zeitreihen mit $\mathbf{p} > 1$. Die Schwierigkeit im Fall

$\mathbf{p} > 1$ besteht darin, dass wir bei der Nutzung einer bestimmten Yule-Walker-Gleichung für die Schätzung der Operatoren $\alpha_1, \dots, \alpha_{\mathbf{p}} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ in den FARCH(\mathbf{p})-Gleichungen den Vektor $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1 \cdots \alpha_{\mathbf{p}})$ betrachten und diesen als Element von $\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathbf{p}}, \mathcal{H}}$, also einem Hilbert-Schmidt-Operator von $\mathcal{H}^{\mathbf{p}}$ nach \mathcal{H} , interpretieren müssen. Damit liegt keine Selbstabbildung vor, sodass bei Umformungen im Nachweis darauf zu achten ist, dass passende Elemente verknüpft werden. Trotz dieser Schwierigkeit kommen wir in Satz 4.37 (a) für den Schätzer $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ in (4.73) für $\prod_{\mathcal{J}_{\mathbf{p},K}} \boldsymbol{\alpha}$, wobei $\prod_{\mathcal{J}_{\mathbf{p},K}}$ der Projektionsoperator auf einen bestimmten Unterraum $\mathcal{J}_{\mathbf{p},K}$ des Hilbert-Raums $\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathbf{p}}, \mathcal{H}}$ ist, für jedes feste $K \in \mathbb{N}$ zum Ergebnis

$$\left\| \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \prod_{\mathcal{J}_{\mathbf{p},K}} \boldsymbol{\alpha} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathbf{p}}, \mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(N^{-1}).$$

Des Weiteren gilt in Satz 4.37 (b)

$$\left\| \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha} \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\mathbf{p}}, \mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta})$$

für eine geeignete Folge $(K_N)_N$ mit $K = K_N \rightarrow \infty$. Die Aussagen in beiden Teilen von Satz 4.37 sind neuartig, da sich, soweit uns bekannt, mit dem FARCH(\mathbf{p})-Modell nicht für $\mathbf{p} > 1$ befasst wurde. Ein weiteres bedeutendes Resultat formulieren wir in Satz 4.51. Dort erhalten wir für die Schätzer $\hat{\alpha}_{1;L,K}$ in (4.117) und $\hat{\beta}_{1;L,K,M}$ in (4.118) der Operatoren $\alpha_1 \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ bzw. $\beta_1 \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ einer \mathcal{H} -wertigen FGARCH(1, 1)-Zeitreihe

$$\left\| \hat{\alpha}_{1;L,K} - \alpha_1 \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta}) \quad \text{und} \quad \left\| \hat{\beta}_{1;L,K,M} - \beta_1 \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(M^{-2\beta})$$

mit $\beta > 0$ für geeignete Folgen $(K_N)_N, (L_N)_N, (M_N)_N$ mit $K = K_N \rightarrow \infty, L = L_N \rightarrow \infty, M = M_N \rightarrow \infty$. Der Nachweis dieses Satzes ist sehr aufwändig, da wir eine Vielzahl diverser Voraussetzungen beachten und wir zuvor asymptotische obere Schranken für die Schätzfehler der Schätzer für die Operatoren in einer bestimmten invertierten Darstellung herleiten müssen (siehe Lemma 4.46). In [11], Proposition 3 werden die Parameter $\delta, \alpha_1, \beta_1$ einer FGARCH(1, 1)-Zeitreihe, ohne sie auf einen endlichdimensionalen Unterraum zu projizieren, zwar im Sinne fast sicherer Konvergenz geschätzt, jedoch wird keine explizite Rate angegeben. Schließlich geben wir in Satz 4.55, unter ähnlichen Voraussetzungen wie in Satz 4.51, eine zentrale Aussage zur Schätzung aller Operatoren von \mathcal{H} -wertigen FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihen mit $\max(\mathbf{p}, \mathbf{q}) > 1$ an, ohne die Operatoren auf einen endlichdimensionalen Unterraum zu projizieren. Und zwar gilt für bestimmte $\beta > 0$ und geeignete Folgen $(K_N)_N, (L_N)_N, (M_N)_N$ mit $K = K_N \rightarrow \infty, L = L_N \rightarrow \infty, M = M_N \rightarrow \infty$ für den Schätzer $\hat{\alpha}_{1;L,K}$ in (4.117) für α_1 der \mathcal{H} -wertigen FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihe mit $\mathbf{p}, \mathbf{q} > 1$

$$\left\| \hat{\alpha}_{1;L,K} - \alpha_1 \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(K^{-2\beta})$$

und für die Schätzer $\hat{\alpha}_{i;L,K,M}$ aus (4.142) für die Operatoren α_i mit $i = 2, \dots, \mathbf{p}$ sowie für die j -te Komponente $\hat{\beta}_{[q;L,K,M]}^{(j)}$ der Schätzer $\hat{\beta}_{[q;L,K,M]}$ in (4.139) für β_j mit $j = 1, \dots, \mathbf{q}$ der \mathcal{H} -wertigen FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihe mit $\mathbf{p}, \mathbf{q} > 1$ gilt

$$\left\| \hat{\beta}_{[q;L,K,M]}^{(j)} - \beta_j \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(M^{-2\beta}) \quad \text{und} \quad \left\| \hat{\alpha}_{i;L,K,M} - \alpha_i \right\|_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}^2 = O_{\mathbb{P}}(M^{-2\beta}).$$

Solch eine explizite asymptotische Schranke für die Schätzung der in den FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Zeitreihen enthaltenen Operatoren mit $\max(\mathbf{p}, \mathbf{q}) > 1$, ohne sie auf einen endlichdimensionalen Unterraum zu projizieren, ist neuartig (in [11], Theorem 2 werden die Parameter im FGARCH(\mathbf{p}, \mathbf{q})-Modell mit $\max(\mathbf{p}, \mathbf{q}) > 1$ (mit einem Quasi-Maximum-Likelihood-Schätzer) zwar im Sinne fast sicherer Konvergenz geschätzt, allerdings werden keine expliziten Raten angegeben und es wird eine Projektion auf einen endlichdimensionalen Unterraum vorgenommen).

Ausblick

Aus den Ideen und Ergebnissen dieser Arbeit kann eine Reihe zusätzlicher Fragestellungen abgeleitet werden. Es sind grundsätzlich weitere Definitionen für die in Definition 3.1 genannten FARCH- und FGARCH-Gleichungen möglich (siehe bspw. [18], Kapitel 2). Denkbar ist auch die Betrachtung von FARCH- und FGARCH-Zeitreihen mit Werten in Funktionenräumen mit Definitionsbereich $[0, 1]^n$ für ein $n > 1$ oder $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $-\infty < a_i \leq b_i < \infty$ für alle $i = 1, \dots, n$. Es stellt sich außerdem die Frage, ob und wie sich das FARCH- und das FGARCH-Modell über Funktionenräume hinaus, also in weitaus abstrakteren Banach- und Hilbert-Räumen, definieren lassen. Für das FARCH- und das FGARCH-Modell wäre die Schätzung der Ordnung interessant (siehe Kokoszka und Reimherr [30] für die Schätzung der Ordnung bei FAR-Zeitreihen). Von Interesse ist außerdem die Schätzung der Parameter von FARCH- und FGARCH-Zeitreihen, die bspw. Werte in $C[0, 1]$ oder in anderen Räumen annehmen (siehe Ruiz-Medina und Liebana-Álvarez [37]). Schließlich stellt sich die Frage, welche asymptotischen unteren Schranken die Schätzfehler für die Schätzer der Parameter in den FARCH- und FGARCH-Zeitreihen besitzen und ob optimale Schätzer für die Parameter existieren.

Literaturverzeichnis

- [1] Adams R. A. und Fournier, J. J. F. (2003). *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York.
- [2] Andersen T. G., Davis R. A., Kreiss J.-P. und Mikosch T. V. (2009). *Handbook of Financial Time Series*. Springer, Berlin.
- [3] Aue A., Horváth L. und Pellatt D. F. (2017). Functional generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Time Series Analysis* **38**, 3 – 21.
- [4] Aue A. und Klepsch J. (2017). Estimating functional time series by moving average model fitting. arXiv:1701.00770v1.
- [5] Billingsley P. (1995), *Probability and Measure*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [6] Bollerslev T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* **31**, 307 – 327.
- [7] Bosq D. (2000), *Linear Processes in Function Spaces*. Springer, New York.
- [8] Bosq D. und Blanke P. (2007), *Inference and Prediction in Large Dimensions*. John Wiley & Sons Ltd.
- [9] Brockwell P. J. und Davis, R. A. (2002). *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer, New York. (2. Auflage).
- [10] Cerovecki C. und Hörmann S. (2015). On the CLT for discrete Fourier transforms of functional time series. arXiv:1506.00970v2.
- [11] Cerovecki C., Francq C., Hörmann S. und Zakoïan J.-M. (2019). Functional GARCH Models: The Quasi-likelihood Approach and Its Applications. *Journal of Econometrics*. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2019.01.006>.
- [12] Delft A. v. und Eichler, M. (2018). A Note on Herglotz’s Theorem for Time Series on Function Spaces. arXiv:1801.04262v1.
- [13] Delft A. v. und Eichler, M. (2018). Locally Stationary Functional Time Series. *Electronic Journal of Statistics* **12**, 107 – 170
- [14] El Hajj L. (2011). Théorèmes limites pour les processus autorégressifs à valeurs dans $D[0, 1]$. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **349**, 821 – 825.
- [15] Elstrodt J. (2011). *Maß- und Integrationstheorie*. Springer, Berlin (7. Auflage).
- [16] Engle R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation. *Econometrica* **50**(4), 987 – 1008
- [17] Ferraty F. und Vieu, P. (2006). *Nonparametric Functional Data Analysis*. Springer, New York.

- [18] Francq C. und Zakoïan, J.-M. (2010). *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. John Wiley & Sons Ltd.
- [19] Gohberg I., Goldberg S. und Kaashoek M.A. (1990). *Classes of Linear Operators, Vol.I* Birkhäuser, Basel.
- [20] Gouriéroux C. (1997). *ARCH Models and Financial Applications*. Springer, New York.
- [21] Horváth L. und Kokoszka P. (2012). *Inference for Functional Data with Applications*. Springer, New York.
- [22] Hörmann S. Horváth L. und Reeder R. (2013). A Functional Version of the ARCH Model. *Econom. Theory* **29**(2), 267 – 288.
- [23] Hörmann S. und Kokoszka P. (2010). Weakly dependent functional data. *The Annals of Statistics* **38**, 1845 – 1884.
- [24] Hsing T. und Eubank R. (2015). *Theoretical Foundations of Functional Data Analysis, with an Introduction to Linear Operators*. Wiley, West Sussex, UK.
- [25] Kaballo W. (2014). *Aufbaukurs Funktionalanalysis und Operatortheorie*. Springer Spektrum, Berlin.
- [26] Kingman J.F.C. (1974). Subadditive Ergodic Theory. *Annals of Probability* **6**, 883 – 909.
- [27] Klenke A. (2008). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer, Berlin (2. Auflage).
- [28] Klepsch J., Klüppelberg C. und Wei T. (2017). Prediction of functional ARMA processes with an application to traffic data. *Econometrics and Statistics* **1**, 128 – 149.
- [29] Klepsch J. und Klüppelberg C. (2017). An Innovations Algorithm for the prediction of functional linear processes. *Journal of Multivariate Analysis* **155**, 252 – 271.
- [30] Kokoszka P. und Reimherr M. (2013). Determining the order of the functional autoregressive model. *Journal of Time Series Analysis* **34**, 116 – 129.
- [31] Ledoux M. und Talagrand M. (1991). *Probability in Banach Spaces*. Springer, Berlin.
- [32] Mas A. (2006). Weak convergence in the functional autoregressive model. *Journal of Multivariate Analysis* **98**, 1231 – 1261.
- [33] Mitchell H. (1997). *Topics in Multiple Times Series*. Royal Melbourne Institute of Technology.
- [34] Nsiri S. und Roy R. (1993). On the invertibility of multivariate linear processes.
- [35] Panaretos V. und Tavakoli S. (2013). Fourier analysis of stationary time series in function space. *The Annals of Statistics* **41**(2), 568 – 603.
- [36] Ramsay J.O. und Silverman B.W. (1997). *Functional Data Analysis*. Springer, New York.
- [37] Ruiz-Medina M.D. und Álvarez-Liévana J. (2018). Strongly consistent autoregressive predictors in abstract Banach spaces. arXiv:1808.01659

- [38] Spangenberg F. (2013). Strictly Stationary solutions of ARMA equations in Banach spaces *Journal of Multivariate Analysis* **121**, 127 – 138.
- [39] Stout W.F. (1974). *Almost Sure Convergence*. Academic Press, New York.
- [40] Tichonow A.N. und Arsenin V.Y. (1977). *Solutions of Ill-Posed Problems*. Winston and Sons, Washington DC.
- [41] Turbillon C., Marion J.-M. and Pumo B. (2007). Estimation of the moving-average operator in a Hilbert space. *Recent advances in stochastic modeling and data analysis. World Sci. Publ., Hackensack, NJ*, 597 – 604.
- [42] Werner D. (2011). *Funktionalanalysis*. Springer, Berlin (7. Auflage).

Abkürzungsverzeichnis

AR	autoregressiv
ARCH	autoregressive conditional heteroskedasticity
ARMA	autoregressive moving average
f.a.	fast alle
FAR	funktionale AR
FARCH	funktionale ARCH
FARMA	funktionale ARMA
f.f.a.	für fast alle
FGARCH	funktionale GARCH
FMA	funktionale MA
f.s.	fast sicher
f.ü.	fast überall
GARCH	generalized autoregressive conditional heteroskedasticity
i.Z.	in Zeichen
MA	moving average
o.B.d.A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
ONB	Orthonormalbasis
ONS	Orthonormalsystem
u.i.v.	unabhängig identisch verteilt

Anhang

Nachfolgend geben wir den Quellcode in der Programmiersprache *R* für die Erzeugung der Darstellungen in Kapitel 5 an. Diese Darstellungen lassen sich exakt reproduzieren, da ihre Codierung vom R-Befehl „set.seed()“ Gebrauch macht.

Grundlegender Quellcode in Kapitel 5

Den folgenden Quellcode haben wir für die Simulation von Realisationen im gesamten Kapitel 5 benötigt.

```
n <- 1000          # Anzahl der Zerlegungen des Intervalls [0,1].
Nu <- numeric(n)   # Vektor aus n Nullen für die x-Achse in Plots.
N <- 100           # Anzahl für  $\tilde{\text{varsigma}}_{\{p,q^*\}}^2_N$  aus (5.7).

# Simulation von zwölf Innovationen aus (5.5).
set.seed(10)
Z <- rnorm(12)
B <- matrix(nrow=n,ncol=12)
E <- matrix(nrow=n,ncol=12)
set.seed(20)
for(j in 1:12){
  B[,j] <- c(0,cumsum(sqrt(1/n)*rnorm(n-1)))
  for(i in 1:n){
    E[i,j] <- (1/sqrt(1+(i-1)/n))*(Z[j]+B[i,j])
  }
}

# Definition von N quadrierten Innovationen aus (5.5) für
#  $\tilde{\text{varsigma}}_{\{p,q^*\}}^2_N$  aus (5.7).
set.seed(30)
Z_1 <- rnorm(N)
B_1 <- matrix(nrow=n,ncol=N)
E2_1 <- matrix(nrow=n,ncol=N)
set.seed(40)
for(j in 1:N){
  B_1[,j] <- c(0,cumsum(sqrt(1/n)*rnorm(n-1)))
  for(i in 1:n){
    E2_1[i,j] <- ((1/sqrt(1+(i-1)/n))*(Z_1[j]+B_1[i,j]))^2
  }
}
```

```

# Definition der mit 1/n skalierten Integraloperatoren
# C_1, C_2 und C_3 mit den Kernen c_1, c_2 und c_3 als Matrizen
# für die Riemann'sche Summe.
c1 <- function(s,t){(1/20)*(1-s)^2*t^2}
c2 <- function(s,t){(1/10)*((s-1/2)^2 + (t-1/2)^2)}
c3 <- function(s,t){(1/100)*(s^3 + t^3)}
C1_skal <- matrix(nrow=n,ncol=n)
C2_skal <- matrix(nrow=n,ncol=n)
C3_skal <- matrix(nrow=n,ncol=n)
for(i in 1:n){
  for(j in 1:n){
    C1_skal[i,j] <- (1/n)*c1((i-1)/n,(j-1)/n)
    C2_skal[i,j] <- (1/n)*c2((i-1)/n,(j-1)/n)
    C3_skal[i,j] <- (1/n)*c3((i-1)/n,(j-1)/n)
  }
}

```

Plot der Innovationen in Kapitel 5

```

# Plot der Simulationen aus dem vorherigen Abschnitt, die wir
# als drei Realisationen der Innovationen epsilon_1, ..., epsilon_4
# interpretieren.
dev.new(width=6.25,height=4.5)
par(mfrow=c(2,2),mar=c(2.5,2.5,0.5,0.5))
t <- seq(0,1,length.out=n)
matplot(t,mgp=c(0,0.5,0),cbind(E[,1],E[,2],E[,3],Nu),type="l",
        col=c("red","green","blue","grey"),lty=c(1,1,1,5),
        ylim=c(-2.75,2.75),xlab="",ylab="")
matplot(t,mgp=c(0,0.5,0),cbind(E[,4],E[,5],E[,6],Nu),type="l",
        col=c("red","green","blue","grey"),lty=c(1,1,1,5),
        ylim=c(-2.75,2.75),xlab="",ylab="")
matplot(t,mgp=c(0,0.5,0),cbind(E[,7],E[,8],E[,9],Nu),type="l",
        col=c("red","green","blue","grey"),lty=c(1,1,1,5),
        ylim=c(-2.75,2.75),xlab="",ylab="")
matplot(t,mgp=c(0,0.5,0),cbind(E[,10],E[,11],E[,12],Nu),type="l",
        col=c("red","green","blue","grey"),lty=c(1,1,1,5),
        ylim=c(-2.75,2.75),xlab="",ylab="")

```

Die FARCH(1)-Zeitreihe in Abschnitt 5.1

```

# Simulation und Plot einer Realisation von  $X^2_0$  der FARCH(1)-
# Zeitreihe.
tildevarsigma10_N <- numeric(n)
for(k in 1:(N-1)){
  S_prov <- E2_1[,k]
  for(l in (k+1):N){
    S_prov <- E2_1[,l]*(C1_skal%*%S_prov)
  }
}

```

```

    }
    tildevarsigma10_N <- tildevarsigma10_N + S_prov
}
X2_0_10 <- (1/100)*(E2_1[,N]+tildevarsigma10_N) # siehe (5.9).
dev.new(width=3.25,height=2.35)
par(mfrow=c(1,1),mar=c(2.5,2.5,0.5,0.5))
t <- seq(0,1,length.out=n)
matplot(t,cbind(X2_0_10,Nu),type="l",col=c("black","grey"),
        lty=c(1,5),ylim=c(0,0.07),xlab="",ylab="")

# Simulation und Plot von je drei Realisationen der Differenzen
# von X_1, ..., X_4 der FARCH(1)-Zeitreihe zu den mit 1/10
# skalierten Innovationen epsilon_1, ..., epsilon_4.
X_1_10 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
X_2_10 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
X_3_10 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
X_4_10 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
Delta_1_10 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
Delta_2_10 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
Delta_3_10 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
Delta_4_10 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
for(j in 1:3){
  X_1_10[,j] <- E[,j]*(sqrt(1/100+C1_skal**X2_0_10))
  X_2_10[,j] <- E[,j+3]*(sqrt(1/100+C1_skal**X_1_10[,j]^2))
  X_3_10[,j] <- E[,j+6]*(sqrt(1/100+C1_skal**X_2_10[,j]^2))
  X_4_10[,j] <- E[,j+9]*(sqrt(1/100+C1_skal**X_3_10[,j]^2))
  Delta_1_10[,j] <- X_1_10[,j] - (1/10)*E[,j]
  Delta_2_10[,j] <- X_2_10[,j] - (1/10)*E[,j+3]
  Delta_3_10[,j] <- X_3_10[,j] - (1/10)*E[,j+6]
  Delta_4_10[,j] <- X_4_10[,j] - (1/10)*E[,j+9]
}
dev.new(width=6.25,height=4.5)
par(mfrow=c(2,2),mar=c(2.5,2.5,0.5,0.5))
t <- seq(0,1,length.out=n)
matplot(t,mgp=c(1.75,0.5,0),cbind(Delta_1_10[,1],Delta_1_10[,2],
  Delta_1_10[,3],Nu),type="l",col=c("red","green","blue",
  "grey"),lty=c(1,1,1,5),ylim=c(-0.005,0.005),xlab="",
  ylab="")
matplot(t,mgp=c(1.75,0.5,0),cbind(Delta_2_10[,1],Delta_2_10[,2],
  Delta_3_10[,3],Nu),type="l",col=c("red","green","blue",
  "grey"),lty=c(1,1,1,5),ylim=c(-0.005,0.005),xlab="",
  ylab="")
matplot(t,mgp=c(1.75,0.5,0),cbind(Delta_3_10[,1],Delta_3_10[,2],
  Delta_3_10[,3],Nu),type="l",col=c("red","green","blue",
  "grey"),lty=c(1,1,1,5),ylim=c(-0.005,0.005),xlab="",
  ylab="")
matplot(t,mgp=c(1.75,0.5,0),cbind(Delta_4_10[,1],Delta_4_10[,2],
  Delta_4_10[,3],Nu),type="l",col=c("red","green","blue",
  "grey"),lty=c(1,1,1,5),ylim=c(-0.005,0.005),xlab="",
  ylab="")

```

Die FARCH(2)-Zeitreihe in Abschnitt 5.2

```

# Simulation und Plot der Realisationen von  $X^2_0$  und  $X^2_{-1}$ 
# als Komponenten von  $\text{varsigma}^{\{(2,0)\}}_0$  der FARCH(2)-Zeitreihe.
tildevarsigma20_N <- numeric(2*n)
for(k in 1:(N-1)){
  S_prov <- c(E2_1[,k],numeric(n))
  for(l in (k+1):N){
    S_prov <- c(E2_1[,l]*(C1_skal%%S_prov[1:n])+
               E2_1[,l]*(C2_skal%%S_prov[(n+1):(2*n)]),
               S_prov[1:n])
  }
  tildevarsigma20_N <- tildevarsigma20_N+S_prov
}
varsigma20_0 <- (1/100)*(c(E2_1[,N],numeric(n))+tildevarsigma20_N)
X2_0_20 <- varsigma20_0[1:n]
X2_minus1_20 <- varsigma20_0[(n+1):(2*n)]
dev.new(width=6.25,height=2.35)
par(mfrow=c(1,2),mar=c(2.5,2.5,0.5,0.5))
t <- seq(0,1,length.out=n)
matplot(t,mgp = c(2,0.5,0),cbind(X2_minus1_20,Nu),type="l",
       col=c("black","grey"),lty=c(1,5),ylim=c(0,0.07),xlab="",
       ylab="")
matplot(t,mgp=c(2,0.5,0),cbind(X2_0_20,Nu),type="l",col=c("black",
       "grey"),lty=c(1,5),ylim=c(0,0.07),xlab="",ylab="")

# Simulation und Plot von je drei Realisationen der Differenzen
# von  $X_1, \dots, X_4$  der FARCH(2)-Zeitreihe zu den mit  $1/10$ 
# skalierten Innovationen  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_4$ .
X_1_20 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
X_2_20 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
X_3_20 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
X_4_20 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
Delta_1_20 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
Delta_2_20 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
Delta_3_20 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
Delta_4_20 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
for(j in 1:3){
  X_1_20[,j] <- 1/100+C1_skal%%X2_0_20+C2_skal%%X2_minus1_20
  X_1_20[,j] <- E[,j]*(sqrt(X_1_20[,j]))
  X_2_20[,j] <- 1/100+C1_skal%%((X_1_20[,j])^2)+
               C2_skal%%X2_0_20
  X_2_20[,j] <- E[,j+3]*(sqrt(X_2_20[,j]))
  X_3_20[,j] <- 1/100+C1_skal%%((X_2_20[,j])^2)+
               C2_skal%%((X_1_20[,j])^2)
  X_3_20[,j] <- E[,j+6]*(sqrt(X_3_20[,j]))
  X_4_20[,j] <- 1/100+C1_skal%%((X_3_20[,j])^2)+
               C2_skal%%((X_2_20[,j])^2)
  X_4_20[,j] <- E[,j+9]*(sqrt(X_4_20[,j]))
  Delta_1_20[,j] <- X_1_20[,j] - (1/10)*E[,j]
  Delta_2_20[,j] <- X_2_20[,j] - (1/10)*E[,j+3]

```

```

Delta_3_20[,j] <- X_3_20[,j] - (1/10)*E[,j+6]
Delta_4_20[,j] <- X_4_20[,j] - (1/10)*E[,j+9]
}
dev.new(width=6.25,height=4.5)
par(mfrow=c(2,2),mar=c(2.5,2.5,0.5,0.5))
t <- seq (0,1,length.out=n)
matplot(t,mgp=c(2,0.5,0),cbind(Delta_1_20[,1],Delta_1_20[,2],
Delta_1_20[,3],Nu),type="l",col=c("red","green","blue",
"grey"),lty=c(1,1,1,5),ylim=c(-0.005,0.005),xlab="",
ylab="")
matplot(t,mgp=c(2,0.5,0),cbind(Delta_2_20[,1],Delta_2_20[,2],
Delta_2_20[,3],Nu),type="l",col=c("red","green","blue",
"grey"),lty=c(1,1,1,5),ylim=c(-0.005,0.005),xlab="",
ylab="")
matplot(t,mgp=c(2,0.5,0),cbind(Delta_3_20[,1],Delta_3_20[,2],
Delta_3_20[,3],Nu),type="l",col=c("red","green","blue",
"grey"),lty=c(1,1,1,5),ylim=c(-0.005,0.005),xlab="",
ylab="")
matplot(t,mgp=c(2,0.5,0),cbind(Delta_4_20[,1],Delta_4_20[,2],
Delta_4_20[,3],Nu),type="l",col=c("red","green","blue",
"grey"),lty=c(1,1,1,5),ylim=c(-0.005,0.005),xlab="",
ylab="")

```

Die FGARCH(1,1)-Zeitreihe in Abschnitt 5.3

```

# Simulation und Plot der Realisationen von  $X^2_0$  und  $\sigma^2_0$  als
# Komponenten von  $\text{varsigma}^{\{(1,1)\}}_0$  der FGARCH(1,1)-Zeitreihe.
tildevarsigma11_N <- numeric(2*n)
for(k in 1:(N-1)){
  S_prov <- c(E2_1[,k],numeric(n))
  for(l in (k+1):N){
    S_prov[(n+1):(2*n)] <- S_prov[1:n]
    S_prov[1:n] <- E2_1[,l]*(C1_skal**S_prov[1:n])+
      E2_1[,l]*(C2_skal**S_prov[(n+1):(2*n)])
  }
  tildevarsigma11_N <- tildevarsigma11_N+S_prov
}
varsigma11_0 <- (1/100)*(c(E2_1[,N],numeric(n))+tildevarsigma11_N)
X2_0_11 <- varsigma11_0[1:n]
s2_0_11 <- varsigma11_0[(n+1):(2*n)]
dev.new(width=3.25,height=2.35)
par(mfrow=c(1,1),mar=c(2.5,2.5,0.5,0.5))
t <- seq (0,1,length.out=n)
matplot(t,mgp=c(2,0.5,0),cbind(X2_0_11,s2_0_11,Nu),type="l",
col=c("black","lightgoldenrod4","grey"),lty=c(1,1,5),
ylim=c(0,0.07),xlab="",ylab="")

```

```

# Simulation und Plot von je drei Realisationen der Differenzen
# von X_1, ..., X_4 der FGARCH(1,1)-Zeitreihe zu den mit 1/10
# skalierten Innovationen epsilon_1, ..., epsilon_4.
X_1_11 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
X_2_11 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
X_3_11 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
X_4_11 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
s2_1_11 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
s2_2_11 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
s2_3_11 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
s2_4_11 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
Delta_1_11 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
Delta_2_11 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
Delta_3_11 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
Delta_4_11 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
for(j in 1:3){
  s2_1_11[,j] <- 1/100+C1_skal%*%X2_0_11+C2_skal%*%s2_0_11
  X_1_11[,j] <- E[,j]*(sqrt(s2_1_11[,j]))
  s2_2_11[,j] <- 1/100+C1_skal%*%((X_1_11[,j])^2)+
    C2_skal%*%s2_1_11[,j]
  X_2_11[,j] <- E[,j+3]*(sqrt(s2_2_11[,j]))
  s2_3_11[,j] <- 1/100+C1_skal%*%((X_2_11[,j])^2)+
    C2_skal%*%(s2_2_11[,j])
  X_3_11[,j] <- E[,j+6]*(sqrt(s2_3_11[,j]))
  s2_4_11[,j] <- 1/100+C1_skal%*%((X_3_11[,j])^2)+
    C2_skal%*%(s2_3_11[,j])
  X_4_11[,j] <- E[,j+9]*(sqrt(s2_3_11[,j]))
  Delta_1_11[,j] <- X_1_11[,j] - (1/10)*E[,j]
  Delta_2_11[,j] <- X_2_11[,j] - (1/10)*E[,j+3]
  Delta_3_11[,j] <- X_3_11[,j] - (1/10)*E[,j+6]
  Delta_4_11[,j] <- X_4_11[,j] - (1/10)*E[,j+9]
}
dev.new(width=6.25,height=4.5)
par(mfrow=c(2,2),mar=c(2.5,2.5,0.5,0.5))
t <- seq(0,1,length.out=n)
matplot(t,mgp=c(2,0.5,0),cbind(Delta_1_11[,1],Delta_1_11[,2],
  Delta_1_11[,3],Nu),type="l",col=c("red","green","blue",
  "grey"),lty=c(1,1,1,5),ylim=c(-0.005,0.005),xlab="",
  ylab="")
matplot(t,mgp=c(2,0.5,0),cbind(Delta_2_11[,1],Delta_2_11[,2],
  Delta_2_11[,3],Nu),type="l",col=c("red","green","blue",
  "grey"),lty=c(1,1,1,5),ylim=c(-0.005,0.005),xlab="",
  ylab="")
matplot(t,mgp=c(2,0.5,0),cbind(Delta_3_11[,1],Delta_3_11[,2],
  Delta_3_11[,3],Nu),type="l",col=c("red","green","blue",
  "grey"),lty=c(1,1,1,5),ylim=c(-0.005,0.005),xlab="",
  ylab="")
matplot(t,mgp=c(2,0.5,0),cbind(Delta_4_11[,1],Delta_4_11[,2],
  Delta_4_11[,3],Nu),type="l",col=c("red","green","blue",
  "grey"),lty=c(1,1,1,5),ylim=c(-0.005,0.005),xlab="",
  ylab="")

```

Die FGARCH(2,1)-Zeitreihe in Abschnitt 5.4

```

# Simulation und Plot der Realisationen von  $X^2_0$ ,  $X^2_{-1}$  und
#  $\sigma^2_0$  als Komponenten von  $\text{varsigma}^{\{(2,1)\}}_0$  der FGARCH(2,1)-
# Zeitreihe.
tildevarsigma21_N <- numeric(3*n)
for(k in 1:(N-1)){
  S_prov <- c(E2_1[,k],numeric(2*n))
  for(l in (k+1):N){
    S_prov <- c(E2_1[,l]*(C1_skal**S_prov[1:n])+
                E2_1[,l]*(C2_skal**S_prov[(n+1):(2*n)])+
                E2_1[,l]*(C3_skal**S_prov[(2*n+1):(3*n)]),
                S_prov[1:n],S_prov[(n+1):(2*n)])
  }
  tildevarsigma21_N <- tildevarsigma21_N+S_prov
}
varsigma21_0 <- (1/100)*(c(E2_1[,N],numeric(2*n))+tildevarsigma21_N)
X2_0_21 <- varsigma21_0[1:n]
X2_minus1_21 <- varsigma21_0[(n+1):(2*n)]
s2_0_21 <- varsigma21_0[(2*n+1):(3*n)]
dev.new(width=6.25,height=2.35)
par(mfrow=c(1,2),mar=c(2.5,2.5,0.5,0.5))
t <- seq(0,1,length.out=n)
matplot(t,mgp = c(2,0.5,0),cbind(X2_minus1_21,Nu),type="l",
      col=c("black","grey"),lty=c(1,5),ylim=c(0,0.07),xlab="",
      ylab="")
matplot(t,mgp=c(2,0.5,0),cbind(X2_0_21,s2_0_21,Nu),type="l",
      col=c("black","lightgoldenrod4","grey"),lty=c(1,1,5),
      ylim=c(0,0.07),xlab="",ylab="")

# Simulation und Plot von je drei Realisationen der Differenzen
# von  $X_1, \dots, X_4$  der FGARCH(2,1)-Zeitreihe zu den mit 1/10
# skalierten Innovationen  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_4$ .
X_1_21 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
X_2_21 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
X_3_21 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
X_4_21 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
s2_1_21 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
s2_2_21 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
s2_3_21 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
s2_4_21 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
Delta_1_21 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
Delta_2_21 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
Delta_3_21 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
Delta_4_21 <- matrix(nrow=n,ncol=3)
for(j in 1:3){
  s2_1_21[,j] <- 1/100+C1_skal**X2_0_21+
                C2_skal**X2_minus1_21+
                C3_skal**s2_0_21
  X_1_21[,j] <- E[,j]*(sqrt(s2_1_21[,j]))
  s2_2_21[,j] <- 1/100+C1_skal**((X_1_21[,j])^2)+

```



```

        C2_skal%%X2_0_21+
        C3_skal%%s2_1_21[,j]
X_2_21[,j] <- E[,j+3]*(sqrt(s2_2_21[,j]))
s2_3_21[,j] <- 1/100+C1_skal%%((X_2_21[,j])^2)+
        C2_skal%%((X_1_21[,j])^2)+
        C3_skal%%s2_2_21[,j]
X_3_21[,j] <- E[,j+6]*(sqrt(s2_3_21[,j]))
s2_4_21[,j] <- 1/100+C1_skal%%((X_3_21[,j])^2)+
        C2_skal%%((X_2_21[,j])^2)+
        C3_skal%%s2_3_21[,j]
X_4_21[,j] <- E[,j+9]*(sqrt(s2_4_21[,j]))
Delta_1_21[,j] <- X_1_21[,j] - (1/10)*E[,j]
Delta_2_21[,j] <- X_2_21[,j] - (1/10)*E[,j+3]
Delta_3_21[,j] <- X_3_21[,j] - (1/10)*E[,j+6]
Delta_4_21[,j] <- X_4_21[,j] - (1/10)*E[,j+9]
}
dev.new(width=6.25,height=4.5)
par(mfrow=c(2,2),mar=c(2.5,2.5,0.5,0.5))
t <- seq(0,1,length.out=n)
matplot(t,mgp=c(2,0.5,0),cbind(Delta_1_21[,1],Delta_1_21[,2],
        Delta_1_21[,3],Nu),type="l",col=c("red","green","blue",
        "grey"),lty=c(1,1,1,5),ylim=c(-0.005,0.005),xlab="",
        ylab="")
matplot(t,mgp=c(2,0.5,0),cbind(Delta_2_21[,1],Delta_2_21[,2],
        Delta_2_21[,3],Nu),type="l",col=c("red","green","blue",
        "grey"),lty=c(1,1,1,5),ylim=c(-0.005,0.005),xlab="",
        ylab="")
matplot(t,mgp=c(2,0.5,0),cbind(Delta_3_21[,1],Delta_3_21[,2],
        Delta_3_21[,3],Nu),type="l",col=c("red","green","blue",
        "grey"),lty=c(1,1,1,5),ylim=c(-0.005,0.005),xlab="",
        ylab="")
matplot(t,mgp=c(2,0.5,0),cbind(Delta_4_21[,1],Delta_4_21[,2],
        Delta_4_21[,3],Nu),type="l",col=c("red","green","blue",
        "grey"),lty=c(1,1,1,5),ylim=c(-0.005,0.005),xlab="",
        ylab="")

```

Danksagungen

An dieser Stelle bedanke ich mich bei denjenigen, ohne deren Mithilfe diese Dissertation nicht zustande gekommen wäre.

Zuerst gebührt mein Dank Herrn Prof. Dr. Meister für die fachliche Betreuung, für zahlreiche hilfreiche Anregungen und für konstruktive Kritik beim Verfassen dieser Arbeit.

Besonders bedanken möchte ich mich auch bei allen weiteren Mitarbeitern des Bereichs Stochastik, die für fachliche Fragen stets ein offenes Ohr hatten. Ich danke allen anderen Mitarbeitern des Instituts für Mathematik für Hilfestellungen im Bereich IT und für die Klärung von organisatorischen Fragen. Frank Schneider und Hartmut Schock gilt mein Dank für das ausführliche und gewissenhafte Korrekturlesen dieser Arbeit.

Darüber hinaus danke ich Herrn Neuser, der mich zum Promotionsvorhaben ermutigt hat.

Abschließend bedanke ich mich herzlich bei meiner Familie, meinen Freunden und allen weiteren Personen, die mich während der Arbeit an dieser Dissertation unterstützt haben.

Eidesstattliche Versicherung

Ich versichere hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt habe. Dazu habe ich keine außer den von mir angegebenen Hilfsmitteln und Quellen verwendet und die den benutzten Werken inhaltlich und wörtlich entnommenen Stellen habe ich als solche kenntlich gemacht.

Rostock, 25.04.2019

Ort, Datum

Unterschrift